

В-65799

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ,

содержащая
начальныя основанія
ариѳметики, геометрии
и тригонометрии,

сочиненная
Академіи Наукъ Адъюнктомъ
Степаномъ Румовскимъ.

Въ Санктпетербургѣ

При Императорской Академіи Наукъ

1760 году.



**ЕГО ЯСНЕВЕЛЬМОЖНОСТИ
МАЛОРОССИЙСКОМУ ГЕТМАНУ,
ЕЯ ИМПЕРАТОРСКАГО
ВЕЛИЧЕСТВА**

ДѢЙСТВИТЕЛЬНОМУ КАМЕРГЕРУ,

АКАДЕМІИ НАУКЪ

ПРЕЗИДЕНТУ,

Лейбгвардіи Измайловскаго полку

ПОДПОЛКОВНИКУ,

Орденѣ святаго Андрея, бѣлаго Орла,

святаго Александра и святыя Анны

КАВАЛЕРУ,

Лондонскаго ученаго собранія и Бер-

линской Академіи Наукъ

ЧЛЕНУ,

СІЯТЕЛЬНІЙШЕМОУ ГРАФУ

КИРИЛУ ГРИГОРЬЕВИЧУ

РАЗУМОВСКОМУ

МИЛОСТИВОМУ ГОСУДАРЮ!

СІЯТЕЛЬНѢЙШІЙ ГРАФЪ.

МИЛОСТИВЫЙ ГОСУДАРЬ!

Должность моя , и природное Особѣ
Вашей великодушіе , съ которыми
принимаете труды наши , произвели
во мнѣ смѣлость первой опытѣ моихъ
трудовъ приписать Вашему Сіятель-
ству , какъ начальнику моего благо-
получія.

За верхъ щастія почитать долженъ , ежели мой трудъ милостиваго пріятія удостоится , которой съ тѣмъ намѣреніемъ приносится , чтобъ увѣрить Ваше Сіятельство , съ какимъ высокопочитаніемъ и преданностію имѣю честь быть

**СІЯТЕЛЬНѢЙШІЙ ГРАФЪ
МИЛОСТИВЫЙ ГОСУДАРЬ!**

ВАШЕГО СІЯТЕЛЬСТВА

**всепокорнымъ и вѣрнымъ слугою
Спепанъ Румовской.**

ПРЕДИСЛОВІЕ.

Недостатокъ на Россійскомъ языкѣ до наукъ касающихся книгъ должно почитать за великое препятствіе разпространенію оныхъ въ Россіи. Въмѣсто того чтобъ съ молодыхъ лѣтъ упражняться въ наукахъ, и острить разумъ, напередъ принуждены бываемъ самое лучшее время употребить на изученіе какого нибудь языка, къ чему ничего кромѣ памяти не требуется, а силы разума коснѣютъ, и въ полномъ возрастѣ къ наукамъ и важнымъ употребленіямъ, гдѣ долговременное требуется разсужденіе, бывають неспособными.

Когда мнѣ за нѣсколько назадъ времени повелѣно было читать на Россійскомъ языкѣ Математической Курсъ, то я пользуясь симъ случаемъ, принявъ намереніе наградить нѣкоторымъ сей недостатокъ въ разсужденіи Математики, и сочинилъ первую часть сокращенія Математическаго, которую благосклонному читателю здѣсь представляю.

ПРЕДИСЛОВІЕ.

При сочиненіи сей части , слѣдовалъ я больше порядку , которой Г. Сегнеръ наблюдалъ въ основаніяхъ Арифметики и Геометріи , и во первыхъ старался , чтобъ книга сія не была ни коротка , ни пространна , дабы начинающему учиться юношеству между прочими полезными упражненіями , можно было наставленія преподавать и въ Математическихъ наукахъ на природномъ языкѣ. Но не тщетно ли мое въ разсужденіи краткости и пространства стараніе было, безпристрастному Читателю лучше разсудить, и погрѣшности видѣть можно, нежели самому сочинителю. И ежели кто найдетъ здѣсь какіе недостатки , тогдѣ можетъ извинить ихъ тѣмъ , что сей есть перьвой мой трудъ , которой въ свѣтъ издается ; а всякаго дѣла начало рѣдко бываетъ совершенно.

Два рода видимъ издаваемыхъ Математическихъ книгъ. Въ иныхъ содержатся правила безъ доказательствъ , и изъясняются одними примѣрами , а въ иныхъ сверхъ того доказательства , и всякаго дѣйствія причины предлагаются. При перьвомъ взглядѣ кажется , что начинающему учиться юношеству по слабости разума , больше пользы принести можетъ употребленіе такихъ книгъ , въ которыхъ содержатся одни правила , и изъяснены примѣрами. Но долгое время
иску-

ПРЕДИСЛОВІЕ.

искусство, и самое разсужденіе противное сему доказываютъ.

Спрогость Математическая, которая состоитъ въ томъ, чтобъ ничего кромѣ извѣстнаго, и ясно доказаннаго за основаніе не принимать, нечувствительно пріучаетъ разсуждать о вещахъ твердо и основательно. Древніе Философы незнающимъ началъ Математическихъ, то есть Ариеметики и Геометріи, не позволяли пользоваться своими наставленіями, вѣдая сколько науки Математическія оспорятъ, и пріуготовляютъ разумъ къ познанію высокыхъ вещей. Изъ сего заключить можно, что начинающимъ учиться полезно предлагать Математическія науки по такой книгѣ, гдѣ спрогость и порядокъ Математической наблюдаются.

Чтобъ показать, коимъ образомъ отъ упражненія въ Математику рождается способность къ твердымъ разсужденіямъ, лучшаго способа не нахожу, какъ кратко изъяснить, въ чемъ состоитъ порядокъ Математической.

Въ предложеніи Математическимъ образомъ истиннѣе начало дѣлается отъ понятій самыхъ простыхъ и извѣстныхъ, и для того во первыхъ предлагаются *Опредѣленія* (Definitiones) содержащія въ себѣ ясныя о предлагаемыхъ вещахъ понятія, или изъясненія, что чрезъ то или другое

ПРЕДИСЛОВІЕ.

слово разумѣть должно, дабы подѣ однимъ именемъ не разумѣть различныхъ вещей. Потомъ полагаются *Аксиомы* (*Axiomata*) такія предложенія, которыя никакого доказательства не требуютъ, и которыхъ истинна сама собою видна. Какъ напримѣръ два количества, которыя равны третьему, суть равны между собою, или въ мѣсто всякаго количества другое ему равное въ численіи принять можно.

Отъ подобныхъ началъ какъ по степени Математики поступаютъ къ труднѣйшимъ понятіямъ, и ничего что не ясно или не доказано за основаніе не принимаютъ. Когда отъ соединенія многихъ опредѣленій, и аксіомъ заключается чтонибудь такое, чего бы изъ одного опредѣленія или аксіомы заключить не можно было, такія предложенія называются *Теоремы* (*Theoremata*). Всякая теорема состоитъ изъ предложенія и доказательства. Въ предложеніи изъясняется, что какойнибудь вещи прилечествуеѣтъ, или не прилечествуеѣтъ, а въ доказательствѣ должны содержаться причины, для чего то или другое оной вещи прилечествуеѣтъ. Доказательства не иное что суть, какъ связь силлогизмовъ, въ которыхъ иногда посылки опускаются, но прилѣжно разсуждающему сами встрѣчаются, ицѣ

ПРЕДИСЛОВІЕ.

или ссылками на предвидущіе параграфы на память приводятся, такъ чтобъ между тѣмъ, что доказывается, и между силлогисмами непрерывной союзъ наблюдаемъ былъ.

Задачи [*Problemata*] называются, такія предложенія, въ которыхъ требуется что нибудь здѣлать, и состоятъ изъ предложенія, рѣшенія и доказательства. Въ предложеніи предписывается что здѣлать должно, рѣшеніе содержитъ дѣйствія, какія къ нахожденію того, что требуется, употреблять надлежитъ, а доказательство причины показываетъ, для чего найдется искомое, ежели то, что въ рѣшеніи предписано, учинено будетъ.

Чтобъ число опредѣленій, теоремъ и задачъ не умножалось, иногда изъ оныхъ выводятся предложенія, которыхъ истинна изъ предвидущихъ сама собою видна, и называются *Слѣдствія* (*Corollaria*). Что можетъ служить къ извѣсненію предлагаемыхъ вещей, то обыкновенно включается въ примѣчанія.

Изъ сего краткаго описанія порядку Математическаго явствуетъ, что ежели кто упражняясь въ Математикѣ привыкнетъ мысли свои и разсужденія такъ располагать, чтобъ ничего неизвѣстнаго, неяснаго и безъ доказательства не утверждать,

ПРЕДИСЛОВІЕ.

ждать, то рассуждая и о другихъ вещахъ помухъ порядку послѣдовать будетъ, для того что привычка есть другая природа.

Къ подтвержденію сей истинны присовокуплю здѣсь слова славнаго Локка, которой говоритъ: Я выше сего уломянухъ, что Математическія науки весьма способны хъ пріученію разума хъ тпердымъ и основательнымъ рассужденіямъ. Сіе я сказалъ не въ тахомъ смыслѣ, чтобъ всякому надлежало быть Математикомъ: но когда кто обучался Математикѣ получитъ способность рассуждать порядочно, то тому же порядку послѣдовать будетъ и въ рассужденіяхъ о другихъ вещахъ.

Сверхъ порядку Математическаго, и различность матерій въ Математикѣ предлагаемыхъ подаетъ случай къ изощренію разума. Сіе мѣсто почитаю я за пристойное предложить читателю, изъ какихъ частей состоитъ Математика,

Между различными тѣлѣ свойствами первое, которое чувствамъ нашимъ подвержено, и безъ котораго другія едва съ тѣломъ сопряжены быть могутъ, есть протяжение тѣлѣ. Всякому видно, что протяжения могутъ быть различнаго роду, которыя, хотя отъ тѣлѣ не отдѣльны, однакожъ для способности разумъ человеческой долженъ былъ отъ тѣлѣ отличать, и о каждомъ рассуждая особливо, свойства ихъ

ПРЕДИСЛОВІЕ.

ихъ опредѣлять. По протяженіи тѣлъ во-
первыхъ вѣзру человѣческому представ-
ляется множество ихъ , котораго ни ко-
имъ образомъ вообразить не можно безъ
того , чтобъ вкупѣ не вообразить и про-
странства, которое когда человѣкъ на ча-
сти раздѣлять и ихъ между собою срав-
нивать будетъ , то и число себѣ вообра-
зить долженъ. Отъ количества на боль-
шее или меньшее число частей раздѣлен-
наго произошла *Арифметика* , а отъ про-
странства предѣлы имѣющаго , и на ча-
сти дѣлимаго начало свое получила *Геометрія* , двѣ части *Математики* , ко-
торыя въ точности предъ всѣми прочими
имѣютъ преимущество.

Человѣкъ по изслѣдованіи свойствъ
чиселъ и протяженія , или по врожденно-
му любопытству , или по необходимо-
сти для облегченія своихъ нуждъ , раз-
суждая о тѣлахъ , во первыхъ примѣ-
чаетъ движеніе ихъ , откуда нужнѣй-
шая и полезнѣйшая для общества наука,
начало свое получить должна была *Механика*. Въ тѣлѣ , по елику оно къ дви-
женію способность имѣетъ , можно раз-
личать , или стремленіе его къ движе-
нію какою нибудь силою уничтоженное ,
или самое онаго движеніе. Отъ перваго
произходитъ *Статика* , которая по раз-
дѣленію тѣлъ на твердыя и жидкія
раздѣ-

ПРЕДИСЛОВІЕ.

раздѣляется на *Статику* собственно называемую , или науку о равновѣсїи твердыхъ тѣлъ , и на *Гидростатику* о равновѣсїи жидкихъ. А когда человѣкъ разсуждать началъ о дѣйствительномъ тѣлъ движеніи , то произошла *Динамика* , которая также по раздѣленію тѣлъ на твердыя и жидкія раздѣляется на *Динамику* и *Гидродинамику*. Отъ Динамики на конецъ множество другихъ произошло , изъ которыхъ обѣ одной мореплавашельной наукѣ , по елику она есть искусство , въ движеніе приводить и управлять корабли посредствомъ Механическихъ силъ , упомянуть довольно.

По изобрѣтеніи началъ сихъ нужныхъ и полезныхъ знаній , ничто больше разумъ человѣческой плѣнить и удивить не могло , какъ порядочное движеніе звѣздъ , и для того человѣкъ пользуясь изобрѣтеніями къ благосостоянію своему потребными , сперва , по одному любопытству долженъ былъ возвестъ взоръ свой на небо , и испытать движеніе свѣтилъ небесныхъ. Откуда должна была произойти *Астрономія* , отъ которой на послѣдокъ начало свое получила *Географія* , знаніе опредѣлять фигуру землі и взаимное положеніе мѣстъ на поверхности земной находящихся ; *Морелланіе* , по елику оно показываетъ средства направ-
лять

ПРЕДИСЛОВІЕ.

дѣять по морямъ путь помощію свѣтилъ небесныхъ , и *Хронологія* , которая показываетъ по теченію солнца и луны раздѣлять время.

Лучи простираясь по прямымъ линиямъ и освѣщая пѣла подали случай къ *Оптикѣ* , и отъ главнаго ихъ свойства , чтобъ простирались по прямымъ линиямъ , начало свое получила *Оптика*. Лучи простираются по прямымъ линиямъ пока теченію ихъ ничто не препятствуетъ , но какъ скоро встрѣятся съ какимъ нибудь тѣломъ , то путь свой переменяютъ. Ежели тѣло будетъ темное и непроходимое , то лучи отражаются , или отпрыгиваютъ ; ежели прозрачное , то переменявъ путь свой насквозь проходятъ. Сии два явленія подали случай къ *Катоптрикѣ* и *Диоптрикѣ*.

Изъ множества другихъ наукъ , между частями Математическими *Музыка* и *Артилерія* по достоинству мѣсто занять могутъ , по елику одна показываетъ причину согласія различныхъ голосовъ , а другая дѣйствія пороку изчисляетъ. Прочія науки какъ напримѣръ *Фортификація* и *Архитектура гражданская* между частями Математическими вмѣщаются бывають не столько по своему свойству , сколько по произволению писателя и намеренію ,
съ кото-

ПРЕДИСЛОВІЕ:

съ которыми книга издается. Должно думать, что со временемъ число Математическихъ частей еще умножится, ибо у древнихъ Арифметика только и Геометрія Математику составляли, а прочія науки тогда уже мѣста сего удостоены, когда начала ихъ помощію Геометріи до такой ясности доведены, какую имѣютъ самыя Геометрическія истины. Изъ сего слѣдуетъ, что числа Математическихъ частей опредѣлить не можно. Чѣмъ больше въ Физикѣ открыто будетъ неоспоримыхъ истинъ, которыя бы могли служить основаніемъ, тѣмъ больше Математика разпространится. Сіе предвидя Баконъ сказалъ: *Когда Физика день стѣ для новыя приращенія получа, новыя Аксиомы изобрѣтатъ будетъ, то и число Математическихъ частей умножится.*

Изъ сего видно, сколь пространно поле Математики, и сколь нужна Арифметика и Геометрія къ пріобрѣтенію знанія другихъ частей Математическихъ. Но чтобъ не оставить начальнѣйшей въ нынѣшнія времена части Математической, которой изобрѣтеніе больше всѣхъ чести разуму человеческому приноситъ, которой всѣ Математическія науки совершенствомъ своимъ

виѣ

ПРЕДИСЛОВІЕ.

имѣ должны , упомянуть я долженъ объ *Алгебрѣ*. Трудно и почти не возможно здѣсь описать въ чемъ *Алгебра* состоитъ : Иные называютъ ее наукою изчисления дѣлать помощію знаковъ, но сіе описаніе не подаетъ яснаго понятія объ *Алгебрѣ* вообще взятой. Происхожденія ея не можно лучше представить , какъ ежели *Арифметику* и *Геометрію* сравнимъ съ двумя рѣками , изъ которыхъ каждая съ начала имѣя особенное теченіе , напоследокъ соединившись составили одну , которая пространствомъ , стремленіемъ и глубиною несравненно прежнихъ превосходитъ.

Хотя *Математика* предъ всѣми науками въ точности преимущественно имѣетъ , и знаніе первыхъ ея частей всякому почти не обходимо нужно , однакожъ сіе въ ней начинать должно за нѣкоторую неспособность , что начала ея по большей части суть такого свойства , что не видя употребленія оныхъ , и въ начинающихъ учиться при самомъ вступленіи отъращеніе производятъ. По сему могъ бы кто винить *Математиковъ* , что они не спарываютъ о изобрѣтеніи другаго способа , къ познанію *Математическихъ истинъ*; но въ разумѣ сего оправдать ихъ можетъ *Евклидовъ* отвѣтъ ,

)()(

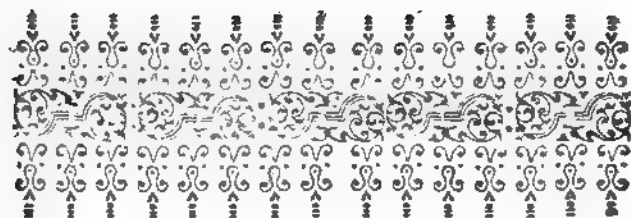
ПРЕДИСЛОВІЕ.

отвѣтъ , которой онъ далъ своему Государю. Когда Птоломей у Евклида спросилъ , нѣтъ ли другаго пути къ познанію Матемашики , которой бы не такъ былъ труденъ какъ обыкновенной ; тогда отвѣтствовалъ Евклидъ : Нѣтъ и для Государей особливаго и способнѣйшаго пути къ познанію Математики. Въ прочемъ почитая за излишнее дѣло пространно доказывать пользу Матемашики , тѣмъ же заключаю , что въ общемъ житіи ничего безъ познанія величины и количества въ пользу нашу употребить не можемъ , которое отъ одной Матемашики заимствовать должно.

) o (

НАЧАЛЬНЫЯ ОСНОВАНІЯ
АРИΘΜΕΤΙΚИ.





ГЛАВА ПЕРВАЯ.

О ЦѢЛЫХЪ ЧИСЛАХЪ.

ОПРЕДѢЛЕНІЕ 1.

1.

Ариѳметика есть наука, которая показываетъ свойства чиселъ, и подаютъ правила къ рѣшенію случающихся въ общемъ житіи задачъ.

Примѣчаніе 1.

2) Ариѳметика, какъ и всѣ другія науки, раздѣляется на двѣ части на Теоретическую и Практическую. Въ Теоретической предлагаются однѣ свойства чиселъ, и все, что изъ свойствъ ихъ слѣдуетъ. А Практическая показываетъ способы, какъ
▲ должно

должно найденныя свойства чиселъ употреб-
лять къ рѣшенію задачъ.

ОПРЕДѢЛЕНІЕ 2.

3) Число [Numerus] есть множе-
ство частей одинакаго роду вмѣстѣ
взятыхъ : всякая изъ нихъ называется
единица [Unitas.]

Слѣдствіе.

4) По сему всякое число должно от-
носиться къ известной единицѣ ; и понеже
число есть множество единицъ , то оно
увеличиться и уменьшится можетъ. Уве-
личится тогда , когда къ нему нѣсколько
единицъ тогожъ роду приложено будетъ.
Уменьшится напротивъ того , когда отъ него
нѣсколько единицъ отнимется.

Примѣчаніе.

5) Во всѣхъ счисленіяхъ или измѣре-
ніяхъ беремъ нѣкоторую мѣру за единицу ,
и ищемъ , сколько разъ она въ предложенной
величинѣ или количествѣ содержитсяъ. Мѣра
и сама можетъ быть величина или количе-
ство , отъ какой нибудь единицы зависящее.
Множество найденныхъ мѣръ называется
число

опре-

ОПРЕДѢЛЕНІЕ 3.

6) Когда принятая къ численію единица *A* нѣсколько разъ повторенная равна будепѣ совершенно предложенной величинѣ *B*, то сіе число единицъ называется *цѣлое число*. А ежели единица *A* будепѣ и сама какъ величина изъ единицъ соспоящая, то она называется *часть на цѣло дѣлящая* [*pars aliquota*] величины *B*.

ОПРЕДѢЛЕНІЕ 4.

7) Когда не сама единица, но ея часть какая нибудь на цѣло дѣлящая повторена будепѣ, и уравнипся предложенной величинѣ, число полпореанныхъ частей называется *ломаное число* или *дроби* (*Numerus fractus* или *fractio*).

Примѣчаніе.

8) Ежели единица нѣсколько разъ повторенная уравнипся съ данною величиною, то и часть такой единицы на цѣло дѣлящая можетѣ уравнипся той же величинѣ, когда она нѣсколько разъ повторишся. Слѣдовательно всякая величина цѣлыми числами изображенная можетѣ быпѣ изображена раз-

личными образами чрезъ ломанья числа. Величина ломанымъ числомъ изображенная можетъ быть больше единицы, меньше единицы, и равна единицѣ.

ОПРЕДѢЛЕНІЕ 3.

9) Ломаное число или дробь состоитъ изъ двухъ чиселъ, изъ которыхъ одно показываетъ, на сколько частей единица раздѣляется, и называется *Знаменатель*; а другое, которое показываетъ, сколько частей, на которыя единица раздѣлена, къ счисленію берется, называется *Числитель* дроби. Которыя одинакаго имѣютъ знаменателя, или къ той же части единицы относятся, называющіяся *дроби одинакаго знаменателя*.

Примѣчаніе.

10) Дробь изображается поставляя числителя надъ линѣчкою, а знаменателя подъ линѣчкою, какъ напримѣръ $\frac{3}{4}$, число 3 будетъ числитель, а 4 знаменатель; и ежели бы дробь $\frac{3}{4}$ относилась къ аршину, тобѣ она означала, что аршинъ должно раздѣлять на четыре части, и такихъ частей должно взять три. Знаменатель и числитель

числитель обыкновенно бывают цѣлыя числа, хотя могутъ быть и сами ломаныя числа.

Слѣдствіе 1.

11) Изъ сихъ свойствъ чиселъ слѣдуетъ, что величина единицы не увеличивается числа. Для лучшаго понятія пусть у меня будетъ восемь маленькихъ шариковъ, а у другого восемь большихъ. Всякъ можетъ разсудить, что отъ того, что мои единицы, то есть маленькіе шарики меньше, нежели другого единицы, то есть большіе шары; мое число единицъ не уменьшается, а его не увеличивается,

Слѣдствіе 2.

12) Но величина или количество чиселъ изображенное зависитъ отъ числа и отъ величины единицы, къ которой оно относится. Количество какое нибудь не только увеличивается, когда число единицъ уменьшается, но и тогда, когда единица сама собою увеличивается. Подобнымъ образомъ количество и уменьшается

Слѣдствіе 3.

13) Дробь или ломаное число обращается въ цѣлое, ежели та часть единицы,

которая своимъ повтореніемъ произвела дробь, возмется за единицу. Слѣдовательно логическое число больше становится, когда числитель увеличивается; также увеличивается, когда часть единицы больше становится. Подобнымъ образомъ дробь и уменьшается, когда число частей и самая часть единицы убавляется.

Слѣдствіе 4.

14) Слѣдовательно при томъ же числѣ, когда единицы или части единицъ вдвое больше или десятикратно прошивъ прежняго увеличатся, то и величина числомъ изображенная вдвое или десятикратно больше будетъ; напротивъ того, когда при томъ же числѣ единицы или части единицъ вдвое или десятикратно уменьшены будутъ, то и величина числомъ изображенная вдвое или въ десять разъ уменьшится.

ПОЛОЖЕНІЕ 1.

15) Имѣя способность считать десять, чтобъ большія числа изображать и выгопарипать можно было, обыкновенно десять простыхъ единицъ называемъ десяткомъ, десять десятковъ сотнею, десять сотенъ означаемъ новою единицею тысячею.

тысячею. И какъ считали отъ единицы до тысячи, подобнымъ образомъ считаемъ отъ тысячи до миллиона. Послѣ тысячъ полагаемъ десятки тысячъ, послѣ десятковъ сотни тысячъ, послѣ сотенъ тысячъ десять сотенъ тысячъ, или однимъ словомъ миллионъ, такъ, чтобъ всякая единица пышшей ступени составляла десять единицъ послѣдующей.

16) Отъ миллиона считаемъ дальше, такъ какъ считали отъ единицы до миллиона. Дошедши до миллиона, послѣ единицъ миллиона полагаемъ десятки миллионѣвъ, потомъ сотни миллионѣвъ, тысячи миллионѣвъ, десятки тысячъ миллионѣвъ, сотни тысячъ миллионѣвъ, потомъ десять сотенъ тысячъ миллионѣвъ, или билліонъ. Подобнымъ образомъ считаемъ отъ билліона до триллиона, отъ триллиона до квадриллиона, отъ квадриллиона до квинтиллиона и далѣе.

17) Когда единица раздѣляется на сколько нисѣудь равныхъ частей, то одна изъ нихъ называется или половиною, или третью,

или четвертью, или пятою частью и проч. по числу частей, на сколько единица раздѣлится. Иногда беремъ десятую, сотенную, тысящную часть единицы, подобно случаю послѣдующая часть меньше бываетъ по десять разъ единицы предыдущей, и называются десятичные части или дроби.

ПОЛОЖЕНІЕ 2.

18) При численіи пишется мянутыхъ чиселъ больше не употребляется, какъ десять слѣдующихъ знаковъ:

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, которыхъ знаменованіе всякому извѣстно.

Примѣчаніе.

19) Знаки, которыми числа изображаются, зависящъ отъ произволенія. Вышеозначенные для того употребляются, что они издревле приняты, и что способѣ ихъ къ изображенію чиселъ не имѣемъ.

ПОЛОЖЕНІЕ 3.

20) Помянутые знаки не всегда имѣютъ одинаковое знаменованіе, истинн

истинное, узнается по мѣсту, которое каждой знакъ занимаетъ. На первомъ мѣстѣ отъ лѣвой руки всякой знакъ имѣетъ свое собственное знаменопаніе. На второмъ мѣстѣ отъ лѣвой руки всякой знакъ до десяти разъ значитъ больше, нежели на первомъ, то есть десятки; на третьемъ мѣстѣ отъ лѣвой руки стояще знаки означаютъ сотни, на четвертомъ мѣстѣ единицы тысячъ, или тысячи, на пятомъ десятки тысячъ, на шестомъ сотни тысячъ; на седьмомъ тысячи тысячъ или единицы милліоновъ, такъ чтобъ единица предъидущаго знака дѣлала десять единицъ послѣдующаго.

21) Знакъ, который стоитъ передъ мѣстомъ, гдѣ стоящее число означаетъ единицы, означаетъ число десятыхъ частей единицы, на вторыхъ сотенныхъ, на третьихъ въ тысячныхъ, и такъ далѣе. Мѣсто, гдѣ единицы оканчиваются, означается запятою (,).

22) Знакоу стоящихъ на седьмомъ мѣстѣ знаменопаніе сходствуетъ

стпуетъ съ знаменопаніемъ тѣхъ ,
 которые стоятъ на лерьпомъ отъ
 прапой руки , съ тою разностію ,
 что къ знакамъ стоящимъ на седь-
 момъ мѣстѣ прикладыается сло-
 во миллионъ. Такимже образомъ дѣ-
 лается посѣмое изъ пторого , деся-
 тое изъ третьяго , десятое изъ чет-
 ьвертаго , и проче даже до трина-
 цатаго , прикладыая слово милли-
 онъ. Знаки стѣяще на трина-
 цатомъ , четырнадцатомъ , пятна-
 цатомъ и проч: даже до децятна-
 цатаго пыгопаридаются такъ какъ
 тѣ , которые стоятъ на лерьпомъ ,
 пторомъ , третьемъ и проч: при-
 кладывая слово билліонъ : Подоб-
 ны мѣ образомъ продолжается на и ме-
 нопаніе отъ билліона до трилліона , отъ
 трилліона до квадрилліона и далѣе.

23) Если какой нибудь сте-
 пени единиць не дѣстаетъ , то мѣ-
 сто ихъ налполняется знакомъ (0) ,
 которой назъвается нуль. Напри-
 мѣръ , если бы сотенныхъ единиць
 не было , то въ на мѣсто ихъ , то
 есть на третьемъ мѣстѣ отъ пра-
 пой руки должно было лоставитъ 0
 на

на тотъ конецъ , чтооъ всякаго
стелени единицы стояли на опредѣ-
ленныхъ себѣ мѣстахъ.

С л ѣ д с т в і е .

24) Понеже знакъ о ничего самъ со-
бою не значитъ , то когда въ какомъ ни-
будь числѣ опредѣленъ будетъ знакъ едини-
цы означающей , оное число ни увеличится
ни уменьшится , сколько бы нулей , и съ
которой бы стороны ни придано было.

З А Д А Ч А I .

25) *Написанное число переписа-
вать.*

р ѣ ш е н і е .

Данное число должно раздѣлитьъ
на члены , изъ которыхъ каждой дол-
женъ состоятъ изъ трехъ знаковъ , на-
чиная дѣленіе отъ правой руки къ лѣ-
вой , не смотря на то , сколько въ
послѣднемъ останется . Вѣкіе при
знака должно отдѣлитьъ запятою или
точкою : первому знаку послѣ вся-
кихъ двухъ запятыхъ или точекъ над-
писывать по порядку слѣдующіе зна-
ки :

ки : I, II, III, IV, V и проч : то есѣ надѣ седьмымъ I, что будѣтъ означаѣть милліоны, надѣ принапцатымъ II, что будупѣ значипѣ билліоны, надѣ девятинапцатымъ III знакѣ приліоновѣ, и такѣ далѣе, а почки или запятые безѣ сихѣ знаковѣ будупѣ означаѣть тысячи, и такѣ по силѣ положеній

III II I

число 5.431.863.045.123 456.789 надлежитѣ выговариваѣть слѣдующимъ образомъ : пять приліоновѣ, чѣтырѣста трипцатѣ одна тысяща : восемь сотѣ шестидесятѣ три [для знака II] билліона, сорокѣ пять тысячѣ, сто двапцатѣ три [для знака I] милліона, чѣтырѣста пятьдесятѣ шесть тысячѣ семь сотѣ восемьдесятѣ девять.

Примѣчаніе.

26) Наблюдая правила въ положеніяхѣ и въ семѣ предложеніи описанныя безѣ труда можно будѣтъ всякое число написаѣть.

27) Если случипѣ написаѣнное число слѣдующимъ образомъ : 405,37, то такое число по запятую выговариваѣть надлежитѣ, такѣ какѣ въ предложеніи показано ; знакѣ послѣ запятой слѣдующіи по 6-24 должны

должно выговаривать какъ слѣдуетъ , чешырестра пять , тридцатыхъ частей и семь сотенныхъ. Подобнымъ образомъ должно выговаривать и слѣдующія числа: 456,089; 605,806; 0,0603 и проч:

28) По силѣ параграфа 24 всѣ слѣдующія числа 00405,37; 0405,3700; 00405,370 и проч: тужь имѣють силу , какую имѣетъ 405,37.

29) Если въ числѣ такимъ образомъ написанномъ, 6405,3708 запятая перенесется на другое мѣсто черезъ знакъ впередъ , какъ на примѣръ 64053,708 , тогда знакъ , которой показывалъ десятые части , показывать будетъ единицы ; а которой показывалъ сотенные части , будетъ показывать десятые части , также знакъ единицы означающей будетъ означать десятки , и знакъ , которой показывалъ десятки , будетъ означать сотни , то есть всякаго знака единицы будутъ вдесятеро спѣить противъ прежняго. Слѣдовательно симъ положеніемъ запятой въ десять разъ увеличится предложенное число.

30) Изъ сего можно видѣть , что если запятую еще впередъ черезъ знакъ перенести , на примѣръ въ томъ же числѣ 64037,08 , то его знаменование вдесятеро увеличится : противное должно разумѣть объ уменьше-

уменьшеніи , то есть , ежели запятую отнесешь черезъ знакъ назадъ ; тогда число въ десять разъ меньше станеть прошивъ прежняго , какъ напримѣръ $640,53708$, ежели черезъ два знака запятая отнесена будетъ $64,053708$, тогда число въ сто разъ уменьшился и такъ далѣе.

ПОЛОЖЕНІЕ 4.

31) Ломаное число означается двумя знаками , между которыми проподится линѣчка. Числитель ставится надъ линѣчкою , а знаменатель лишается подъ линѣчкою , какъ напримѣръ $\frac{2}{3}$, что разумѣть должно слѣдующимъ образомъ. Знаменатель показываетъ , на сколько частей должно раздѣлить единицу , къ которой дробь относится , а числитель показываетъ , сколько такихъ частей взять надлежитъ.

ПОЛОЖЕНІЕ 5.

32) Когда два количества между собою равны , то равенство ихъ означается знакомъ $=$, которой лишается между равными количествами ,

честпами , и называется знакъ равенства.

ПОЛОЖЕНІЕ 6.

33) Чтобъ способѣ можно было предлагаемыя въ Арифметикѣ и другихъ частяхъ Математики истинны доказывать , то въ число чисто употребляются Латинскія литеры , какъ маленькія *a, b, c* и проч: такъ и большія *A, B, C* и проч:

АКСІОМА 1.

34) Равныя количества彼此 mutually одно другому сопоставлены быть могутъ.

ОПРЕДѢЛЕНІЕ 6.

35) Сложеніе [additio] есть способъ двухъ или многимъ числамъ одного роду находить одно равное. Найденное число называется сумма [Summa]. Знакъ сложения есть $+$, и называется плюсъ [plus].

опре-

О П Р Е Д Ъ Л Е Н І Я 7.

36) *Вычитаніе* [Subtractio] есть способъ находить число, которымъ одно изъ двухъ данныхъ чиселъ другое превышаетъ. Найденное число называется *разность* или *остатокъ* [Differentia или Residuum]. Знакъ вычитанія есть $-$, и называется *минусъ* [Minus].

П р и м ѣ ч а н і е.

37) Когда какія нибудь числа складывать должно, напр: А и В, то пишется слѣдующимъ образомъ: $A+B$ или $8+5=13$. А когда одно число изъ другого вычитать надлежитъ, то къ вычитаемому числу прилагается знакъ $-$. Напр: ежели бы изъ 9 должно было вычесть 5 или D изъ C, то бы надлежало написать слѣдующимъ образомъ: $9-5=4$: $C-D$.

С л ѣ д с т в і е 1.

38) Слѣдовательно вычитаемое число должно быть меньше того, изъ котораго вычитать должно.

С л ѣ д с т в і е 2.

39) Понеже числа состоятъ изъ единицъ, десятокъ, сотенъ, тысячъ и проч: то ежели

ежели надобно слагать нѣсколько чиселъ ,
надлежитъ всѣ единицы , всѣ десятки , всѣ
сотни и проч : складывать особливо , и распо-
лагать по мѣстамъ имъ пристойнымъ .
Тожь должно разумѣть и о вычитаніи , то
есть надлежитъ единицы вычитать изъ
единицъ , десятки изъ десятокъ , сотни
изъ сотенъ и проч : и продолжать даже до
последнихъ отъ лѣвой руки знаковъ .

АКСИОМА 2.

40) Ежели жъ двумъ разнымъ
количествамъ разнымъ сданы
будутъ ; то и произшедшия суммы
равны будутъ между собою . Так-
же когда изъ разныхъ количествъ
вычтены будутъ равныя , то и
остатки будутъ между собою
равны .

ЗАДАЧА 2.

41) Данные одного рода числа
складывать

рѣшеніе.

Данные числа надлежитъ написать
такимъ образомъ , чтобъ единицы спо-
б
дли

или подъ единицами , десятки подъ десятками , сотни подъ сотнями , и такъ далѣе. Попомъ проведши подъ ними черту , должно начинать сложеніе отъ малѣйшихъ единицъ , и сумму единицъ подписывать подъ единицами , сумму десятковъ подъ десятками , сотенъ подъ сотнями , и такъ далѣе. Десятки , которые произойдутъ отъ простыхъ единицъ , надлежитъ приложить къ десяткамъ предложенныхъ чиселъ : произшедшія отъ сложенія десятковъ сотни надлежитъ приложить къ сотнямъ данныхъ чиселъ. Подобнымъ образомъ должно слагать сотни , тысячи и проч. : и найдется сумма искомая. Тоже должно наблюдать при сложеніи чиселъ , которыя десятичныя дроби при себѣ имѣютъ.

Примѣры.

95678=A	604,506
10463=B	0,3408
26124=C	20,72
1200=D	687,0045
133465=S=A+B+C+D.	1312,5713.

Надлежитъ начинать сложеніе отъ правой руки , и говорить , 8 да 3 дѣлаютъ 11 ; да 4 дѣлаютъ 15 , то есть одинъ де-

сятковъ

десятокъ и 5 единицъ , и для того подъ единицами надлежитъ только подписать 5 , а десятокъ должно причислить къ слѣдующему ряду. Такимъ же образомъ должно слатать десятки , и прежде всего къ нимъ приложить число десятковъ , произшедшихъ отъ сложенія единицъ , слѣдующимъ образомъ: 1 да 7 дѣлаютъ 8 , да 6 буаетъ 14 , да еще 2 будетъ 16 ; то есть 6 десятковъ , которые подпиши подъ рядомъ десятковъ , и одна сотня , которую отнеси къ слѣдующему ряду , гдѣ сотни поставляются. Сложеніе сотенъ дѣлай подобнымъ образомъ , и говори : сотня , произшедшая отъ сложенія десятковъ , да 6 дѣлаютъ 7 , да 4 дѣлаютъ 11 , да 1 буаетъ 12 , да 2 здѣлаетъ 14 , то есть четыре сотни и одна тысяча ; и для того подъ рядомъ сотенъ подпиши 4 , а одну тысячу отнеси къ слѣдующему ряду , и говори : 1 да 5 дѣлаютъ 6 , да 6 дѣлаютъ 12 , да 1 , то будетъ 13 ; то есть 3 и 1 десятокъ тысячъ ; 3 тысячи подписавши подъ рядомъ тысячъ продолжай сложеніе , и говори : 1 да 9 будетъ 10 , да еще 1 будетъ 11 , да 2 здѣлаетъ 13. И понеже больше ничего слатать не останется , то 13 надлежитъ такъ написать , чтобъ знакъ 3 , означающей десятки тысячъ , спсѣлъ подъ рядомъ десяти тысячнымъ , а единица значащая сотни тысячъ на шестомъ отъ ~~той~~ руки мѣстѣ. И такъ сумма предложенныхъ чиселъ будетъ

133465. Подобнымъ образомъ поступать надлежитъ при сложеніи другаго примѣру и прочихъ.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Сложеніе бываетъ , когда всѣ единицы , всѣ десятки , всѣ сотни и проч : сложены будучъ въ одну сумму (§ 39); но найденное такимъ образомъ число содержишь въ себѣ всѣ единицы , всѣ десятки , всѣ тысячи данныхъ чиселъ , слѣдовательно найденное число будетъ сумма предложенныхъ чиселъ и сложеніе вѣдано.

Слѣдствіе.

42) И такъ при сложеніи дробей , которыя къ той же единицѣ относятся , и одинакаго суть знаменованія , должно поступать равнымъ образомъ. Надлежитъ сложить всѣхъ числителей , и подъ суммою подписать общаго знаменателя. Какъ напр : сумма дробей $\frac{3}{7} + \frac{3}{7}$ будетъ $= \frac{6}{7} = 1$, и дробей $\frac{1}{7} + \frac{3}{7} + \frac{3}{7}$, сумма будетъ $= \frac{7}{7}$.

ЗАДАЧА 3.

43) Данное число изъ другаго одинакаго роду вычесть.

рѣ-

р ѣ ш е н і е.

Вычитаемое число подѣ тѣмъ ,
изъ котораго вычестъ надлежитъ ,
должно такъ подписать , чѣобъ еди-
ницы соотвѣтствовали единицамъ ,
десятки десяткамъ , сотни сотнямъ ,
тысячи тысячамъ , и подѣ ними про-
вестъ линію. Начало вычитанія дѣ-
лать должно отъ малѣйшихъ единицъ ,
и вычитать единицы изъ единицъ ,
десятки изъ десятковъ , сотни изъ
сотенъ и прочъ ; остатокъ отъ единицъ
надлежитъ подписывать подѣ едини-
цами ; остатокъ отъ десятковъ подѣ
десятками , отъ сотенъ подѣ сотня-
ми , и такъ далѣе. Но ежели знакъ
которой нибудь числа , изъ котора-
го меньшее вычитается , будетъ мень-
ше , нежели соотвѣтствующей вычи-
таемого , въ такомъ случаѣ отъ зна-
ка слѣдующаго большаго званія должно
занять единицу , и приложивъ къ зна-
ку , изъ котораго вычитанія дѣлать
не можно , гдѣ занятая единица учи-
тывъ десять. Но поемъ вычитаемой
знакъ не можетъ больше быть , какъ
9 ; по по приисовокупленіи десятка ,
какой бы знакъ вычитаемой ни былъ ,

вычитаніе здѣлать можно будетъ. При знакѣ верхняго числа, отъ котораго единица занимается, для памясти спавится почка, чтобъ видно было, что взята единица. Тоже должно наблюдать при вычитаніи чиселъ, при которыхъ случаются десятичныя дроби.

Примѣры.

$$\begin{array}{r} 6874 = A \\ 4253 = B \\ \hline 2621 = A - B. \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 26,368 \\ 0,979 \\ \hline 25,389. \end{array}$$

Пусть вычитаемое число будетъ В, а изъ котораго вычитать надлежитъ, А. Написавъ оныя какъ показано, начинай отъ правой руки, говоря: 3 единицы изъ 4 рехъ останется 1, которую подпиши подъ единицами, 5 изъ 7 въ остаткѣ будетъ 2, что должно подписать на второмъ мѣстѣ отъ правой руки, для того что десятки вычтены изъ десятковъ; 2 изъ 8 останется 6, которыя должно подписать подъ шѣми знаками, коихъ вычитаніе здѣлано. Такимъ же образомъ 4 изъ 6 останется 2, и найдется подлинной остатокъ $A - B = 2621$. Должно то же наблюдать при дѣланіи другаго примѣра.

$$\begin{array}{r} 9.1.2.04 = A \\ 68672 = B \\ \hline 22532 = A - B. \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 6.6, 9.021 \\ 23,021 \\ \hline 37,8811. \end{array}$$

А когда въ вычитаемомъ числѣ случатся нѣкоторые знаки больше, нежели соотвѣтствующіе имъ того числа, изъ котораго вычитаніе дѣлать должно, какъ примѣры показывающъ; то поступать надлежитъ слѣдующимъ образомъ: 2 изъ 4 остатковъ будетъ 2, 7 изъ 0 вычесть не можно, и для того надлежитъ отъ слѣдующаго знака большаго званія занять единицу, то есть десять десятковъ, тогда 7 десятковъ изъ десяти можно будетъ вычесть, и останется 3, что надлежитъ подписать на своемъ мѣстѣ. А понеже отъ 2 сотенъ одна уже взята, то вычитать слѣдуетъ 6 не изъ 2, но изъ 1; но сего учинить не возможно, чего ради должно отъ слѣдующаго знака занять единицу, и сіе означить точкою, и тогда вычитать должно 6 сотенъ изъ 11 ти, въ остаткѣ будетъ 5. Теперь слѣдовало бы вычитатьъ 8 изъ 0; но и сего дѣлать не возможно: надлежитъ отъ знака слѣдующаго отъ лѣвой руки, т. е. 9 ти занять единицу, которая дѣлаетъ 10 послѣдующаго, и для того вычитатьъ должно 8 изъ 10 ти останется 2. Остатокъ подписавъ на приличномъ мѣстѣ, вычитаніе продолжать должно далѣе, и говорить 6 изъ 8, а не изъ 9 ти, въ остаткѣ будетъ 2,

и искомое число будетъ 22532. Подробнымъ образомъ поступать надлежитъ при другомъ примѣрѣ вычитанія.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Изъ дѣйствія видно, что единицы вычитываны изъ единицъ, десятки изъ десятковъ, сотни изъ сотенъ, тысячи изъ тысячъ и далѣе. Слѣдовательно остатокъ покажетъ, сколько вычитаемое число превышаетъ другое единицами, десятками, сотнями и тысячами, слѣдовательно вычитаніе вѣдано (§ 39).

Слѣдствіе.

44) Ломаные числа, которые къ одинакой единицѣ относятся, и имѣютъ одинакаго знаменателя, вычитаются подобнымъ образомъ. Надлежитъ только вычесть числителя одной дроби изъ числителя другой, и подъ разностью подписать общаго знаменателя. Напр: $\frac{3}{8} - \frac{2}{8} = \frac{1}{8}$ или $\frac{7}{12} - \frac{6}{12} = \frac{1}{12}$ и проч:

Примѣчаніе 1.

45) Когда случится вычитать большее число изъ меньшаго, то вычитается меньшее

меньшее изъ бѣльшаго , и къ остатку прилагается знакъ — : напр : 5—8—3.

46) Когда нѣкоторые знаки вычитаемого числа будутъ больше , нежели соотвѣтствующіе имъ верхніе , въ такомъ случаѣ иные спосбнѣ вмѣсто того , чтооу къ слѣдующему отъ лѣвой руки знаку верхняго числа спавить почку , которой знаменование уже объявлено , спавяиъ оную у слѣдующаго вычитаемого знака , которая будетъ значить , что къ вычитаемому знаку прибавить должно единицу , напримѣр :

$$\begin{array}{r} 19040 \\ 868.5 \\ \hline 10355 \end{array}$$

Вычитаніе дѣлай слѣдующимъ образомъ : 5 изъ 10 останется 5 , 9 изъ 14 останется 5 , 7 изъ 10 остатокъ будетъ 3 , 9 изъ 9 будетъ 0 , и для того единицу подписать должно на своемъ мѣстѣ . Основаніе сего способа зависитъ отъ слѣдующей Аксіомы . Когда вычитается одно число изъ другаго , то остатокъ всегда будетъ тотъ же , хотя къ онымъ числамъ по единицѣ или по другому какому знаку приложится (6 40). Такъ ежели вычтется 5 изъ 9 останется 4 , тожъ останется , ежели вычту 6 изъ 10 , то есть 4 .

47) Повѣреніе сложенія способно дѣлается чрезъ вычитаніе, а повѣреніе вычитанія чрезъ сложеніе. Когда сложеніе уже дѣлано, надлежитъ одинъ порядокъ слагаемыхъ чиселъ отдѣлить чертою, какъ въ примѣрѣ А, и сыскать остальныхъ сумму, которую подписавъ подъ суммою всѣхъ чиселъ данныхъ, надлежитъ вычесть изъ всей суммы, и ежели остатокъ будетъ равенъ отдѣленному порядку, то сложеніе будетъ вѣрно.

$$\begin{array}{r}
 95678 = A \\
 \hline
 10463 = B \\
 26124 = C \\
 1200 = D \\
 \hline
 133465 = S \\
 37787 = B + C + D \\
 \hline
 95678 = A
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 604,506 \\
 \hline
 0,3408 \\
 20,72 \\
 687,0645 \\
 \hline
 1312,5713 \\
 708,0653 \\
 \hline
 604,506
 \end{array}$$

48) Вычитаніе повѣряется чрезъ сложеніе слѣдующимъ образомъ: найденной остатокъ данныхъ чиселъ приложи къ вычитаемому числу, и ежели сумма равна будетъ верхнему числу, то вычитаніе дѣлано вѣрно.

91204=A	60, 923
68672=B	23, 02
22532=A-B	37, 903
68672=B	23, 02
91204=A	60, 923.

Приѣчаніе 2.

49) При случающихся въ общемъ житіи задачѣ всякъ можетъ видѣть, гдѣ должно употреблять вычитаніе, и гдѣ сложеніе. Ежели бы кто имѣлъ записную книгу приходоѡ и роходовѡ, и по прошествіи нѣкотораго времени вѣдать бы хотѣлъ, сколько у него денегѡ находится, то бы надлежало всѣ приходы сложить въ одну сумму, потѣмъ сложить и расходы, и сумму расходовѡ вычесть изъ суммы приходоѡ; остатокѡ покажетѣ, сколько денегѡ на лицо. Также, ежели бы мыѡ должны были нѣсколько человекѡ, одинѡ бы долженѡ былѡ А, другой В, претей С, четвертй Д, и самѡ бы другимѡ долженѡ былѡ Е и F, и хотѣлъ бы вѣдать, сколько по возвратѣ и расплатѣ долговѡ останетѣся; то явствуетѡ, что то, чѣмѡ мыѡ другіе должны, надлежитѡ сложить, и чѣмѡ я другимѡ послѣднюю, ежели она будетѡ меньше прежней, вычесть изъ первой; остатокѡ дастѣ число денегѡ, которыя у меня будутѣ. Ежели же сумма послѣдняя будетѡ больше

больше первой, то должно первую вычитать из последней; и передв оставшкѣмъ поставишь знакъ —, которой пусть будетъ R . Количество R будетъ значить, сколько я буду долженъ, ежели всѣ возвращенныя изъ долговъ деньги употреблю на расплату долговъ. О знакахъ + и —, какъ ихъ разумѣть должно, пространствѣ говорено будетъ въ Алгебрѣ.

ОПРЕДѢЛЕНІЕ 8.

§ 0) Умноженіе [Multiplicatio] есть способъ изъ данныхъ двухъ чиселъ, которые пусть будутъ M и N , находить прѣпие P , въ которомъ бы столько разъ содержалось одно которое нибудь изъ данныхъ N , сколько разъ единица содержится въ другомъ данномъ M . Искомое число P называется произведеііе [Productum seu factum], M множитель [multiplicator], N множимое число [Multiplicandum]; а оба вмѣстѣ называются однимъ словомъ факторы [Factores].

Слѣдствіе.

§ 1) И такъ, когда надобно число какое нибудь N на другое M умножить, то надлежитъ столько разъ взять число N ,
сколько

сколько въ M единицъ содержится. Слѣдовательно умноженіе есть повторенное сложеніе. Умноженіе означается слѣдующимъ образомъ: $M \cdot N = P$ или $M \times N = P$, а по большей части просто $MN = P$.

О П Р Е Д Ъ Л Е Н І Е 9.

52) *Дѣленіе* [*Divisio*] есть способъ изъ данныхъ двухъ чиселъ D и N находить третіе Q , въ которомъ бы столько разъ содержалась единица, сколько разъ одно изъ данныхъ двухъ чиселъ D въ другомъ данномъ N содержится. Искомое число Q называется *частное число* [*Quotus*], D *дѣлитель* [*Divisor*], а N *дѣлимое* [*Dividendum*].

С л ѣ д с т в і е.

53) Слѣдовательно, когда кто хочетъ раздѣлить какое нибудь число N на другое D , т. е. найти Q , тотъ долженъ сколько разъ вычитать число D изъ числа N , сколько разъ можно. Число вычитаній покажетъ искомое Q , то есть сколько разъ число D содержится въ числѣ N ; но само дѣленіе есть нѣсколько разъ повторенное вычитаніе, и какъ вычитаніе противнѣе есть дѣйствіе сложенію, такъ дѣленіе умноженію.

дѣленіе

Дѣленіе означается слѣдующимъ образомъ :
 $N: D=Q$ или $\frac{N}{D}=Q$.

АКСІОМА 3.

§4) Если два разные количества на третие какое нибудь умножены или раздѣлены будутъ , то въ первомъ случаѣ произведенія , а въ другомъ частныя числа будутъ равны.

Слѣдствіе 1.

§5) Если произведеніе $M \times N=P$ раздѣлится на одного фактора , то произойдетъ другой факторъ , т. е. $\frac{M \times N}{M}=\frac{P}{M}=N$. А если частное число $Q=\frac{N}{D}$ умножено будетъ на дѣлителя ; то произойдетъ дѣлимое число $Q \times D=\frac{N \times D}{D}=N$.

Слѣдствіе 2.

§6) Если какое нибудь число N раздѣлено будетъ на двѣ части P и Q такъ , чтобъ было $N=P+Q$, и если которая нибудь часть P раздѣленная на D , дастъ частное число Q ; то понеже $P=Q \times D$, будетъ $N=Q \times D+Q$. Такимъ образомъ , если будетъ $R=S \times D$, то будетъ $N=Q \times D+S \times D$.

то есть , ежели множимое число состоятъ изъ двухъ частей , напр: $A+B=N$, и надлежитъ оное умножить на D ; то произведение найдется , когда всякую часть порознь умножишь на D . Тоже должно разумѣть и о частяхъ $A-B=N$; слѣдовательно $N \times D = A \times D \mp B \times D$.

Слѣдствіе 3.

57) Ежели случится дѣлить $N=A+B$ на D , то такимъ же образомъ частное число будетъ $\frac{N}{D} = \frac{A}{D} + \frac{B}{D}$; и ежели будетъ $D=E+F$, то $\frac{N}{E+F} = \frac{A+B}{E+F} = \frac{A}{E+F} + \frac{B}{E+F}$.

Слѣдствіе 4.

58) Когда въ умноженіи факторы которой нибудь на какое число умножится , то и произведение столькожъ разъ увеличится , сколь велико оное число . Напр: ежели M или N удвоится , или умножится на 2 , то и произведение удвоится ; а ежели одинъ изъ факторовъ умноженъ будетъ на 20 , въ столько разъ и произведение умножится . А когда факторы раздѣлятся на какое нибудь цѣлое число , или въ сколько разъ уменьшится , то и произведение въ столькожъ разъ уменьшится . Напр: ежели бы въ произведеніи $M \times M = P$ вышло

M

М взято было $\frac{1}{10}$ М, то бы и произведение было $= \frac{1}{10}$ Р.

Слѣдствіе 5.

59) Въ дѣленіи ежели дѣлимое число на какое нибудь цѣлое число умножится, то и частное число въ столькожъ разъ увеличится при томъ же дѣлителѣ, какъ какъ будто бы самое частное число на оное было умножено. А ежели дѣлитель на какое нибудь цѣлое число умножится; то частное число въ столько разъ уменьшится. И обратно, ежели дѣлимое число разделено будетъ на какое нибудь цѣлое число, то частное въ столько разъ уменьшится; а когда дѣлитель на какое нибудь цѣлое число разделится, то частное число въ столькожъ разъ умножится.

Слѣдствіе 6.

60) По сему, ежели какое нибудь количество S умножится на другое М, и на тожъ разделится, то произойдетъ самое данное число $S = \frac{S \times M}{M}$. Также, ежели частного числа изображеннаго, какъ выше сего показано $\frac{N}{D}$ дѣлимое число, и дѣлитель на М умножены будутъ, то частное число не переменяется. $\frac{N}{D} = \frac{M \times N}{M \times D}$.

ЗАДАЧА. 4

61) Данное какое нибудь число на другое умножить.

РѢШЕНІЕ.

Пусть даны будутъ числа $M=4$, а $S=15674$ или $M=3$, а $N=24,035$ по § 51. Надлежитъ число S столько само къ себѣ приложить, сколько въ множителѣ единицъ содержится. По сему произведенія данныхъ чиселъ найдутся слѣдующимъ образомъ:

$15675=N$	$24,035$
$15674=N$	$24,035$
$15674=N$	$24,035$
$15674=N$	$24,035$
$62526=N=M \times N.$	$72,105.$

Сей способъ можно употреблять, когда множитель состоятъ изъ простыхъ единицъ; но въ противномъ случаѣ, когда множитель будетъ состоятъ изъ многихъ знаковъ, сего способа никоимъ образомъ употребить не возможно. Для такихъ случаевъ надлежитъ въ памяти содержать произведенія всѣхъ чиселъ изъ одного знаку состоящихъ, на числа изъ одного знаку состоящие, что покажетъ слѣдующая таблица,

в

кр-

которая чрезъ повѣпоренное сложение
здѣлана.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3		9	12	15	18	21	24	27
4			16	20	24	28	32	36
5				25	30	35	40	45
6					36	42	48	54
7						49	56	63
8							64	72
9								81

Когда кпо сию таблицу въ памя-
ти содержишь , то при умноженіи ,
какого нѣудь одного числа на другое ,
посматривай слѣдующимъ образомъ .
Надлежащій множитель подписывать подъ
множимымъ числомъ такъ , чтобъ еди-
ницы соотвѣствовали единицамъ , де-
сятки десяткамъ , сотни сотнямъ и
проч : и подъ ними провести черту .
Потомъ начиная отъ правой руки дол-
жно умножать первымъ знакомъ мно-
жителя всякой знакъ порознь множи-
маго числа , и произведенія подписы-
вать подъ чертою . Десятки произ-
веденіе отъ умноженія надлежитъ при-
давать къ слѣдующему отъ лѣвой
руки

руки произведенно. Такимъ же образомъ должно умножать и другими множителями знаками, наблюдая только то, чтобы произведения изъ десятиковъ отбрасывали десяткамъ, изъ сотенъ сотнямъ, изъ тысячъ тысячамъ и проч. Напоследокъ полученные частныя произведения должны сложить въ одну сумму, которая дастъ иско- мое произведение.

П р и м ѣ р ъ.

$$\begin{array}{r}
 45673 \equiv N \\
 145 \equiv M \\
 \hline
 228365 \quad A \\
 182592 \quad B \\
 45673 \quad C \\
 \hline
 6622585 \equiv M \times N.
 \end{array}$$

Пусть будетъ множимое число N , а множитель M . Напишемъ ихъ такъ, какъ показано, умножай сперва единицу данной таблицы знакомъ 5; и гониме 3жды 5 дѣлаетъ 15, то 5 подпиши подъ первымъ знакомъ, а 1 десятковъ удержи къ слѣдующему мѣсту; потомъ 5 ю 7 дѣлаетъ 35 десятковъ, а съ оставшимся отъ умноженія единицъ десяткамъ будетъ 36, то есть 3 сотни и 6 десятковъ, и для того 6 подпиши на второмъ мѣстѣ, а 3 удержи къ слѣдующему мѣсту; потомъ 5 ю 6 дѣлаетъ 30 сотенъ, а съ удержанными въ

В 2

умѣ

умѣ будетъ 33 сотни, и такъ 3 сотни напиши на третьемъ мѣстѣ, а 3 тысячи удержи въ умѣ; потомъ 5 ю 5 дѣлаетъ 25 тысячъ, да 3 въ умѣ удержанныя, будетъ 28, и по сему знакъ 8 только подписать должно, а 2 удержатъ въ умѣ. Наконецъ 5 ю 4 дѣлаетъ 20, и 2 въ умѣ удержанныя будетъ 22. А понеже больше въ множимомъ числѣ ничего не остается, то должно подписать оба знака 22.

Теперь слѣдуетъ умножать вторымъ знакомъ множителя, то есть десятками, и для того самое первое произведение должно подписать на второмъ мѣстѣ, или подъ тѣмъ знакомъ, которымъ умножаешь, говоря: 4 жны 3 дѣлаетъ 12; знакъ 2 должно подписать противъ знака умножающаго, а единицу удержатъ тѣ умѣ слѣдующему мѣсту; потомъ 4 жды 7 дѣлаетъ 28, съ единицею въ умѣ удержанною будетъ 29; и такъ подпиши только знакъ 9, а 2 удержи къ слѣдующему произведению; потомъ 4 жны 6 дѣлаетъ 24, да 2, дѣлаетъ 26, и въ котораго числа 6 только подпиши на своемъ мѣстѣ, а 2 удержи въ умѣ; потомъ 4 жны 5 дѣлаетъ 20, и еще 2, дѣлаетъ 22, и такъ 2 только подписать должно на надлежащемъ мѣстѣ, а 2 удержатъ въ умѣ. Наконецъ 4 жны 4 дѣлаетъ 16, да 2, будетъ 18; и понеже ничего болѣе умножать не остается, то должно подписать оба знака.

Напо-

Наполѣдокъ умножать слѣдуетъ единицею; и понеже единица означаетъ сотни, произведение изъ единицы на первой множимаго числа знакъ надлежитъ подписать на мѣстѣ, сотнямъ пристойномъ. Но произведение изъ единицы на множимое число будетъ самое множимое число, и сумма всѣхъ частныхъ произведений будетъ—6622585.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Изъ самаго дѣйствія видно, что въ первомъ порядкѣ А всякой знакъ множимаго числа столько разъ содержится, сколько единица въ первомъ знакѣ множителя. Также во второмъ порядкѣ В столько разъ множимое число содержится, сколько единица во второмъ множителя знакѣ. Тоже должно разумѣть и о претъемъ; но понеже всѣ порядки сложены бывша, то въ суммѣ столько разъ будетъ содержаться множимое число, сколько разъ единица въ множителѣ содержится.

Прибѣчаніе.

62) Чтобъ способѣе опредѣлить правила, и понять можно было, которыхъ
Вз при

при умноженіи чиселъ, десятичныя дроби при себѣ имѣющихъ, наблюдать должно, три случая принять должно въ разсужденіе. 1) Когда при множимомъ только чиселъ находится десятичныя дроби. 2) Когда множитель одинъ имѣетъ при себѣ десятичныя дроби. 3) Когда при множителѣ и при множимомъ чиселъ будутъ десятичныя дроби. Примемъ въ разсужденіе первый случай; пусть будетъ множимое число 2608, а множитель 4, произведение будетъ 10432. Но ежели бы множимое число было 260,8; тобъ произведение было 1043,2; а когдабъ множимое число было 26,08, тогда бы произведение было 104,32 (26 $\frac{8}{100}$ 58). Что сказано о множимомъ чиселъ, тобъ должно разумѣть и о множителѣ (26 58). По сему когда 3054, умноженное на 3, дастъ 9162; то умноженное на 0,3 дастъ 916,2; умноженное на 0,03 дастъ 91,62. Такимъ же образомъ тобъ число, умноженное на 23, дастъ 70192: умноженное на 2,3 дастъ 7019,2, а умноженное на 0,23, дастъ 701,92. Изъ сего видно, что правила, которыя при первомъ и второмъ случаяхъ наблюдая издекишь, суть сличны, то есть въ обоихъ случаяхъ въ найденномъ произведении только отъ правой руки должно ставить знаковъ для десятичныхъ дробей, сколько въ множимомъ чиселъ или множителѣ оныхъ имѣется.

63) Понеже всякой факторъ столько требуетъ знаковъ въ произведеніи для десятичныхъ дробей, сколько ихъ числомъ при каждомъ факторѣ находится: слѣдовательно, когда при обѣихъ факторахъ будутъ десятичныя дроби, то въ произведеніи столько надлежитъ отбавить знаковъ отъ правой руки, которые бы десятичныя дроби означали, сколько знаковъ при обѣихъ факторахъ находится. Такъ напр: надлежало бы 3,04 умножить на 2,3; въ произведеніи обыкновеннымъ образомъ найденномъ 6992 должно запятою отъ правой руки отбавить три знака, и искомое произведение будетъ 6,992. Тоже должно разумѣть и о числахъ, которые при себѣ имѣютъ нули, какъ слѣдующую примѣры показываютъ.

$$\begin{array}{r} 15060 \\ 230 \\ \hline 4518 \\ 3012 \\ \hline 3463800. \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 62,345 \\ 3 \\ \hline 187,035. \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 24,035 \\ 0,05 \\ \hline 1,20175. \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 0,204 \\ 3,05 \\ \hline 1020 \\ 612 \\ \hline 0,62220. \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 62,345 \\ 300 \\ \hline 187,03,5 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 0,0072 \\ 0,043 \\ \hline 216 \\ 288 \\ \hline 0,0003096. \end{array}$$

ЗАДАЧА 5.

64) Данное число раздѣлить на другое.

РѢШЕНІЕ.

Пусть будетъ дѣлимое число $N=1071$, а дѣлитель $D=254$, по [§ 53] надлежитъ дѣлителю столько разъ вычестъ изъ дѣлимаго числа, сколько разъ можно: число вычитаній покажетъ, сколько разъ дѣлитель въ дѣлимомъ числѣ содержится, къ которому ежели придана будетъ дробь, которой числитель будетъ число отъ вычитаній оставшееся, а знаменатель самой дѣлитель, то найдено будетъ искомое число.

$$\begin{array}{rcl}
 1071 & = & N \\
 204 & = & D \\
 \hline
 867 & = & N-D \\
 204 & & \\
 \hline
 663 & = & N-D \\
 204 & & \\
 \hline
 459 & = & N-3D \\
 204 & & \\
 \hline
 255 & = & N-4D \\
 204 & & \\
 \hline
 51 & = & N-5D
 \end{array}$$

По сему видно , что дѣлителя 5 разѣ можно вычестъ изъ дѣлимаго числа , и притомъ еще оспанется 51 ; следовательно частное число будетъ $\frac{1071}{204} = 5 \frac{51}{204} = 5 \frac{1}{4}$.

Но подобное дѣленіе очень будетъ не способно , ежели дѣлимое число будетъ велико , и для того въ такихъ случаяхъ вычитаемъ не самого дѣлителя , но его произведенія , происходящія отъ умноженія на какой нибудь знакъ , что дѣлается слѣдующимъ образомъ.

Написавъ отъ лѣвой руки дѣлителя , а отъ правой руки дѣлимое
В 5
число ,

число, надлежитъ въ дѣлимомъ числѣ
 отъ лѣвой руки отдѣлитьъ столько
 знаковъ, сколько въ дѣлителѣ нахо-
 дится: или ежели первой знакъ дѣ-
 лимаго числа будетъ меньше, нежели
 первой дѣлителя, то къ отдѣлен-
 нымъ знакамъ дѣлимаго числа должно
 присовокупить еще слѣдующей, и
 спросить, сколько разъ дѣлитель въ
 отдѣленныхъ знакахъ содержится, что
 дастъ первой знакъ въ частномъ числѣ.
 Симвъ знакомъ надлежитъ умножить
 дѣлителя, и произведение вычитать изъ
 отдѣленныхъ знаковъ дѣлимаго числа.
 Потомъ, послѣ остатка долженъ
 быть меньше, нежели дѣлитель, и на-
 лежитъ къ остатку приписать слѣду-
 ющей знакъ дѣлимаго числа, и спра-
 шивать, сколько разъ дѣлитель въ
 семъ числѣ содержится, что
 дастъ второй знакъ дѣлителя числа.
 Симвъ знакомъ умножь дѣлителя, и
 произведение вычти изъ соотвѣстную
 щихъ знаковъ. Къ остатку, ежели
 имѣются знаки, присовокупи слѣдую-
 щей знакъ дѣлимаго числа, и спроси,
 какъ прежде, сколько разъ дѣлитель
 въ семъ числѣ содержится: знакъ озна-
 чующей, сколько разъ дѣлитель въ дѣ-
 лимомъ

длимомъ числѣ содержитсяъ, дастъ претей знакъ частнаго числа. Подобнымъ образомъ дѣленіе продолжается даже до послѣдняго опъ правой руки дѣлимаго числа знака, и найдется искомое число.

Примѣръ.

$$\begin{array}{r} 805 \overline{) 670894} \quad (833 \frac{329}{805}) \\ \underline{6440} \\ 2689 \\ \underline{2415} \\ 2744 \\ \underline{2415} \\ 329 \end{array}$$

Пусть будетъ дѣлимое число $N=670894$, а дѣлитель $D=805$, который должно написать, какъ въ примѣрѣ написано. Прежде всего надлежитъ отдѣлить отъ дѣлой руки столько знаковъ дѣлагаго числа, изъ сколько знаковъ дѣлитель состоитъ. Но понеже въ трехъ первыхъ знакахъ дѣлитель содержится не можетъ, то должно присовокупить слѣдующей знакъ 8, и спрашивать, сколько разъ дѣлитель 805 въ 6708 содержится? Когда сего скоро узнать не можно, то спрашивай, сколько разъ первой знакъ отъ дѣлой руки содержится въ двухъ первыхъ

выхъ знакахъ дѣлимаго числа. А ежели бы дѣлитель и дѣлимое число изъ равнаго числа знаковъ состояли ; тобѣ надлежало спрашивать , сколько разъ первой знакъ дѣлителя содержится въ первомъ знакѣ дѣлимаго числа , что необыкновенно покажетъ таблица умноженія. Такимъ образомъ найдется , что дѣлитель содержится 8 ю въ отдѣленной части дѣлимаго , и для того написавъ 8 на первомъ мѣстѣ послѣ линійки , умножь знакомъ 8 дѣлителя , и произведение вычти изъ отвѣтствующей части дѣлимаго числа , останется 268. Къ сему остатку присовокупивъ слѣдующей знакъ дѣлимаго числа 9 , и спрашивай , сколько разъ дѣлитель содержится въ 2689 ; найдется 3 жды , и для того написавъ знакъ 3 на второмъ мѣстѣ частнаго числа , и имъ умноживъ дѣлителя , произведение должно вычесть изъ 2689 , въ остаткѣ будетъ 274. Потомъ присовокупивъ слѣдующей знакъ дѣлимаго числа , и будетъ дѣлимая часть 2744 , въ которой по таблицѣ видно , что дѣлитель можетъ содержаться 3 жды ; и для того написавши частное число 3 на своемъ мѣстѣ , должно онымъ умножить дѣлителя , и произведение 2415 вычесть изъ 2744 , въ остаткѣ будетъ 329. И понеже въ дѣлимомъ числѣ больше чиселъ не имѣется , то сей остатокъ и съ дѣлителемъ должно къ частному числу приписать , какъ выше сего показано.

ДОКА-

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Изъ самаго дѣйствія видно , что найденное число показываетъ , сколько разъ дѣлитель въ дѣлимомъ числѣ содержится ; слѣдовательно въ частномъ числѣ столько разъ единицъ содержится , сколько въ дѣлимомъ дѣлитель.

Примѣчаніе 1.

б5) Не всегда помощью таблицы можно узнать , сколько разъ дѣлитель въ отсѣченныхъ дѣлимаго числа знакахъ содержится , а особливо , когда дѣлитель состоитъ изъ многихъ знаковъ. Во второмъ примѣрѣ хотя таблица и показываетъ , что 2 въ 6 содержится 3жды ; однакожъ не больше можно задать , какъ 2мя , потому что ежели прѣмъ умножишь дѣлителя , то произведеніе будетъ больше , нежели первыя знаки дѣлимаго числа сіе показываетъ , что дѣлитель содержится меньше , нежели 3жды въ отдѣленныхъ знакахъ дѣлимаго числа. Противнымъ образомъ , ежели бы послѣ вычтеннаго произведенія остатокъ былъ больше , нежели дѣлитель , или ему равенъ такъ , чтобъ можно было дѣлителя еще вычесть изъ остатку ; то должно задавать большимъ знакомъ , нежели прежде задано было. Сіе наблюдая всегда найдется настоящее частное число.

При-

Примѣчаніе 2.

66) Когда въ дѣленіи при данныхъ числахъ случаются десятичныя дроби ; то какъ въ умноженіи , такъ и здѣсь при случаѣ различать надлежитъ. 1) Когда при дѣлимомъ только числѣ случаются десятичныя дроби. 2) Когда только при дѣлителѣ. 3) Когда при обоихъ , какъ дѣлимомъ такъ и дѣлителѣ. Возмемъ первый случай , и пусть будетъ дѣлимое число 60582 , а дѣлитель 23 , и найдется частное число 2634. Но по 6549 , ежели дѣлимое число на какое нибудь раздѣлится , или въ нѣсколько разъ уменьшится ; то и частное число въ столько же разъ уменьшится , такъ что ежели бы вмѣсто 60582 дѣлимое число было 6058,2 ; тобъ и частное число было 263,4. Ежели дѣлимое число будетъ 605,82 при томъ же дѣлителѣ ; то частное число будетъ ~~605,82~~ при томъ же дѣлителѣ , и 60,582 раздѣленное на 23 , дастъ частное число 2,634 , то есть забавъ дѣленіе обыкновеннымъ образомъ , въ частномъ числѣ столько надлежитъ опредѣлить знаковъ , которые бы означали десятичныя дроби , сколько ихъ при дѣлимомъ числѣ находится.

67) Понеже въ дѣленіи , когда дѣлитель на какое нибудь число умножится , то частное въ столько разъ меньше становится ; а когда дѣлитель на какое нибудь число

число раздѣлится ; то частное число при томъ же дѣлимомъ числѣ въ столько разъ увеличивается , напр: 5768 раздѣленное на 2 , дастъ 2884 ; но когда бы надлежало раздѣлить на 0,2 , тогда частное число должно быть въ десять разъ больше прежняго , и было бы 28840 , поже число раздѣленное на 0,02 дастъ частное число 288400. Слѣдовательно , когда дѣлитель только будетъ имѣть при себѣ десятичныя дроби , и дѣлить дѣлимое число на цѣло , тогда заглавъ дѣленіе обыкновеннымъ образомъ , къ частному числу столько нулей отъ правой руки придать должно , сколько знаковъ для десятичныхъ дробей при дѣлителѣ находится. Но ежели не на цѣло дѣлитель дѣлитъ данное число , то къ самому дѣлимому числу должно придать столько нулей , сколько знаковъ къ десятичнымъ дробямъ принадлежащихъ дѣлителю имѣетъ , и дѣлить обыкновеннымъ образомъ (§ 29). Напр: 53364 раздѣленное на 1,02 , дастъ частное число 54288+.

68) Изъ сего видѣть можно , что когда при дѣлимомъ числѣ , и дѣлителѣ будутъ десятичныя дроби , въ такомъ случаѣ дѣленіе заглавъ , какъ показано выше сего , мѣсто простыхъ единицъ должно опредѣлить слѣдующимъ образомъ: сперва означивъ мѣсто для простыхъ единицъ смотря на дѣлимое число , пошомъ чрезъ столько знаковъ

ковъ запятую впередъ въ правую сторону перенеси, сколько знаковъ при дѣлителѣ для десятичныхъ дробей находится. Напримѣръ число 4567,0046, раздѣленное на 2,04, даетъ $223874+$, въ которомъ смотря на дѣлимое число, должно бы частное быть $22,3872+$. А для дѣлителя запятую должно перенести впередъ черезъ два знака, и искомое частное число будетъ $2238,82+$. А ежели бы дѣлитель былъ 0,203, тобъ частное было $22387,2+$. Тожъ должно разумѣть и о нуляхъ, когда на концѣ данныхъ чиселъ случатся.

б9) Ежели дѣлимое число нацѣло на данного дѣлителя раздѣлено быть не можетъ, т. е. послѣ дѣленія будетъ какой нибудь остатокъ, и дѣлимое число будетъ имѣть при себѣ десятичныя дроби; то остатокъ отбрасывается, когда большой аккуратности не требуется: но въ противномъ случаѣ, также когда при дѣлимомъ числѣ не будетъ десятичныхъ дробей, дѣление продолжается присовокупляя къ дѣлимому числу столько нулей, сколько заблагоразсудится. Произшедшіе отъ сего въ частномъ числѣ знаки означать будутъ десятичныя дроби. Напримѣръ:

$$805) 67089,45 \quad (83,3402361$$

$$\begin{array}{r}
 9440 \\
 \hline
 2689 \\
 2415 \\
 \hline
 274\ 4 \\
 241\ 5 \\
 \hline
 32\ 95 \\
 32\ 20 \\
 \hline
 7500 \\
 7245 \\
 \hline
 2550 \\
 2415 \\
 \hline
 1350
 \end{array}$$

Такимъ образомъ можно продолжать дѣленіе далѣе, ежели кто аккуратнѣйшее частное число имѣть желаетъ. Подобнымъ образомъ поступать должно, когда случится дѣлится меньшее число на большее, какъ на примѣръ: 9 или 9,00 на 12 частное число будетъ 0,75.

Примѣры дѣленія :

$$34050) 6927472500 \quad (203450$$

$$\begin{array}{r}
 68100 \\
 \hline
 117472 \\
 102150 \\
 \hline
 153225 \\
 136200 \\
 \hline
 170250 \\
 170250 \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

■

х

632)

$$\begin{array}{r}
) 64,0054 (0,1012+ \quad 12,04) 361,9224 (30,06 \\
 \underline{63 \ 2} \qquad \qquad \qquad \underline{361 \ 2} \\
 805 \qquad \qquad \qquad 7224 \\
 \underline{612} \qquad \qquad \qquad \underline{7224} \\
 1734 \qquad \qquad \qquad 0 \\
 \underline{1264} \\
 470
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 2,34) 30456 \quad (13015+ \\
 \underline{234} \\
 705 \\
 \underline{702} \\
 360 \\
 \underline{234} \\
 1260 \\
 \underline{1170} \\
 90
 \end{array}$$

Примѣчаніе 3.

70) Повѣреніе умноженія дѣлается чрезъ дѣленіе, и поѣреніе дѣленія чрезъ умноженіе. Для повѣренія умноженія должно раздѣлить произведеніе на котораго нибудь фактора. Ежели умноженіе здѣлано справедливо, то частное число должно быть другой факторъ (55). При повѣреніи дѣленія надлежитъ частное число умножить дѣлителемъ, и ежели произведеніе будетъ самое дѣлимое число, дѣленіе будетъ здѣлано вѣрно.

$$\begin{array}{r}
 6045 \\
 \underline{104} \\
 24180 \\
 \underline{6045} \\
 104) 628600 (6045 \\
 \underline{624} \\
 468 \\
 \underline{416} \\
 520 \\
 \underline{520} \\
 0
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 254) 15368016 (60504 \\
 \underline{1524} \\
 1280 \\
 \underline{1270} \\
 1016 \\
 \underline{1016} \\
 0 \\
 60504 \\
 \underline{254} \\
 242016 \\
 302520 \\
 \underline{121008} \\
 15368016
 \end{array}$$

Изъ сего видно , что какъ дѣленіе , такъ и умноженіе здѣланы вѣрно.

ГЛАВА ВТОРАЯ.

О содержаніи и пропорціи.

О П Р Е Д Ъ Л Е Н І Е 10.

71) Когда два одного роду количества между собою сравниваются , то есть , когда смотрится , какимъ образомъ одно изъ другаго происходитъ ; то сие сравненіе называется содержа-

не [Ratio]. Данные количества называются *термины содержания* [Termini Rationis] одинъ *предви́дущей* [antecedens], а другой *послѣдующей* [consequens].

О П Р Е Д Ъ Л Е Н І Е 11.

72) Когда при сравненіи двухъ количествъ въ разсужденіе берется ихъ разность, т. е. чѣмъ одно другое превышаетъ; то сіе сравненіе называется *Ариѳметическое* [Arithmetica]. А когда разсуждается въ сколько разъ одно другаго больше, т. е. когда въ разсужденіе берется частное число; то сравненіе называется *Геометрическое* [Geometrica]. Знакъ Ариѳметическаго содержанія есть А—В, а Геометрическаго А: В.

О П Р Е Д Ъ Л Е Н І Е 12.

73) *Знаменатель* [Exponens или Denominator Rationis] содержанія есть частное число, которое происходитъ отъ опредѣленія предви́дущаго термина чрезъ послѣдующей, или послѣдующаго чрезъ предви́дущей.

Слѣд-

74) По сему видно , что знаменатель содержанія можетъ быть цѣлое число , можетъ быть и дробь.

ОПРЕДѢЛЕНІЕ 13.

75) Содержание количества A къ количеству B равнымъ называется содержанію количества C къ количеству D , когда послѣдующіе количества B и D раздѣлены будучи на равное число частей ; и сколько частей количества B содержатся будучи въ количестве A , столько же частей количества D содержится будучи въ количестве C , или короче сказать , когда количество A столько разъ содержится въ количестве B , сколько количество C содержится въ количестве D , и обратно, тогда содержание $A : B$ будетъ равно содержанію $C : D$, и количества A , B , C , D называются пропорціональными. Изъ сего видно , что Пропорція [Proportio] есть равенство двухъ содержаній , и пишется $A : B = C : D$, а говорится, какъ A содержится къ B , такъ C содержится къ D .

Слѣдствіе 1.

76) и такъ содержаніе $A:B$ больше будетъ содержанія $C:D$, когда A больше разъ содержитсяъ въ B , нежели C содержитсяъ въ D , что означается слѣдующимъ образомъ: $A:B > C:D$, а содержаніе $C:D$ будетъ меньше содержанія $A:B$. Такое неравенство означается, какъ слѣдуетъ; $C:D < A:B$.

Слѣдствіе 2.

77) Понеже количества A, B, C, D пропорціональны суть, когда B такимъ образомъ производится изъ A , какъ D происходитъ изъ C , и обратно. Но въ умноженіи произведеіе P такъ происходитъ изъ множимаго числа N , какъ множитель M изъ единицы: слѣдовательно $1, M, N$ и P будутъ пропорціональны, и можно ихъ написать, какъ слѣдуетъ $1:M=N:P$. Подобнымъ образомъ въ дѣленіи частное число Q столько разъ содержитъ въ себѣ единицу, сколько дѣлимое число N содержитъ въ себѣ дѣлителя D . По сему $D, N, 1$ и Q будутъ пропорціональны и $D:N=1:Q$.

Примѣчаніе.

78) Къ доказательству количествъ A, B, C, D , что они пропорціональны, ниче-

то не требуется, какъ показать, что какъ A происходитъ изъ B , такъ C изъ D ; или, что то же самое значитъ, что въ количествѣ A столько числомъ такихъ частей содержится, изъ какихъ состоитъ B , сколько въ количествѣ C такихъ частей находится, изъ какихъ состоитъ D ; или что знаменатели содержаній равны между собою. На примѣрѣ, ежели бы было $A = 2B$, а $C = 2D$, или $A = \frac{1}{2}B$, а $C = \frac{1}{2}D$, или $A = B + \frac{2}{3}B$, а $C = D + \frac{2}{3}D$, или $A = mB$ а $C = mD$, взявши за липеру m какіе нибудь по произволѣю числа; то будетъ $A:B = C:D$, слѣдовательно и числа, которыми количества изображаются, будутъ пропорціональны. Изъ опредѣленія содержанія видно, что количества A и B неопредѣленно должны быть одинакаго роду, такъ какъ и C и D . Хотя не требуется, чтобъ всѣ четыре были одинакаго роду, однакожь ни что не препятствуетъ, чтобъ и всѣ четыре были одинакаго роду.

ОПРЕДѢЛЕНІЕ 14.

79) Ежели количества A, B, C, D , будутъ пропорціональны, и будетъ $B = C$; то сія пропорція называется *безпрерывная* [Continua], а терминъ B или C называется *средней пропорциональной* [Medius proportionalis].

ТЕОРЕМА 1.

80) Если будутъ четыре количества A, B, C , и D пропорциональны; то число, которыми оно изображается, будетъ произведение среднихъ равно произведению крайнихъ, то есть, если будетъ

$$A:B=C:D,$$

то должно быть и $A \times D = B \times C$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Понеже $A:B=C:D$, то должно быть $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ (§ 75); умноживъ съ обѣихъ сторонъ сперва на B , потомъ на D произойдетъ $A \times D = C \times B$ (§ 54, 60).

Слѣдствіе.

81) Если будетъ $B=C$, то должно быть также и $A \times D = B \times B$. Помощь обратно, если будетъ $A \times D = B \times C$, то должно быть $A:B=C:D$.

Примѣчаніе.

82) Отсюда имѣемъ другой несомнѣнной признакъ количествъ и чиселъ, которыми

порыми количества изображаются, когда они пропорциональны между собою. И по сему, когда про какие нибудь числа или количества доказать можем, что произведение средних равно произведению крайних; то, что они и пропорциональны между собою, доказано будет.

ТЕОРЕМА 2.

83) Если будет $A : B = C : D$, то будет также и

- 1) $B : A = D : C$
- 2) $A \pm B : A = C \pm D : C$
- 3) $A \pm B : B = C \pm D : D$
- 4) $A : A \pm B = C : C \pm D$
- 5) $B : A \pm B = D : C \pm D$
- 6) $A + B : A - B = C + D : C - D$
- 7) $A - B : A + B = C - D : C + D$
- 8) $A : nB = C : nD$
- 9) $nA : B = nC : D$
- 10) $B : nA = D : nC$
- 11) $nB : A = nD : C$
- 12) $mA : mB = C : D$
- 13) $mA : nB = mC : nD$
- 14) $nB : mA = nD : mC$
- 15) $\frac{A}{m} : \frac{B}{n} = \frac{C}{m} : \frac{D}{n}$
- 16) $\frac{B}{n} : \frac{A}{m} = \frac{D}{n} : \frac{C}{m}$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Къ доказательству истинны сихъ перемѣнничего болѣе не требуется, какъ доказать что въ нихъ произведение среднихъ равно произведению крайнихъ. И понеже порядокъ, какъ доказывать истинну сихъ перемѣнн, есть для всѣхъ почти одинакъ; то довольно будетъ ради краткости, показать справедливость только нѣкоторыхъ. И такъ начиная отъ первой $B:A=D:C$. Ежели сѣ пропорція справедлива, то должно быть $A \times D = B \times C$. Но по положению должно быть $A \times D = B \times C$; слѣдовательно пропорція первая справедлива.

2) Ежели пропорція $A \pm B : A = C \pm D : C$ должна имѣть мѣсто, то должно быть произведение среднихъ равно произведению крайнихъ, то есть:

$$A \times C \pm C \times B = A \times C \pm A \times D.$$

Но $A \times C = A \times C$ и $C \times B = A \times D$ по положению; слѣдовательно въ сей перемѣнн произведение среднихъ равно произведению крайнихъ, и пропорція истинна.

3)

3) Ежели пропорція $A \pm B : B = C \pm D : D$ истинна, то въ ней произведение среднихъ должно быть равно произведению крайнихъ, то есть

$$A \times D \pm B \times D = B \times C \pm B \times D.$$

Но $B \times D = B \times D$ и $A \times D = B \times C$, следовательно несомнѣнной признакъ имѣемъ мѣсто, и пропорція истинна.

4) Перемѣны четвертая и пятая суть обратныя третьей и четвертой; 70,
и по сему о вѣрности ихъ, когда уже первая доказана, сомнѣваться не можно.

6) Ежели пропорція $A + B : A - B = C + D : C - D$ истинна, то должно доказать, что въ ней произведение среднихъ равно произведению крайнихъ. На сей конецъ умножь $A + B$ на $C - D$, и $A - B$ на $C + D$, и будетъ $(A + B) \times (C - D) = (A + B) \times C - (A + B) \times D = A \times C + B \times C - B \times D, A \times D - B \times D.$

Такимъ же образомъ $(A - B) \times (C + D) = (A - B) \times C + (A - B) \times D = A \times C - C \times B + A \times D - B \times D$ и должно быть.

$$A \times C + B \times C - A \times D - B \times D = A \times C - C \times B + A \times D - B \times D.$$

Но

Но $A \times C = A \times C$ и $-B \times D = -B \times D$ и при томъ $B \times C = A \times D$ по положению, следовательно произведенія сугь равны, и пропорція справедлива. Что седьмая перемѣна справедлива, такимъ же образомъ доказать можно

8) Если пропорція $A : nB = C : nD$ истинна, то должно быть $n \times A \times D = n \times B \times C$; но по положению $A \times D = n \times C$: следовательно будетъ и $n \times A \times D = n \times B \times C$ (§ 54). Равнымъ образомъ доказать можно истинну и другихъ перемѣнъ.

ТЕОРЕМА 3.

84) Если количества A, B, C, D всѣ будутъ одинакаго рода, и при томъ $A : B = C : D$, то сперхъ пропорцій въ прежней теоремѣ доказанныхъ, будетъ

$$\begin{aligned} A : C &= B : D \quad " \\ A \mp C : B \mp D &= A : B = C : D. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Сю теорему можно доказать, такъ, какъ прежнюю. Надлежитъ доказать ;

казати , что въ сихъ перемѣнахъ произведенія среднихъ и крайнихъ супъ равны между собою. По сему ; ежели пропорція $A:C=B:D$ справедлива , то должно быть $A \times D = B \times C$: Но по положенію должно быть $A \times D = B \times C$. Слѣдовательно пропорція $A:C=B:D$ справедлива.

Такимъ же образомъ, ежели пропорція $A \mp C : B \mp D = A : B$ имѣетъ мѣсто, то должно быть $(A \mp C) \times B = (B \mp D) \times A$, или $A \times B \mp C \times B = A \times B \mp A \times D$. Но понеже $A \times B = A \times B$ и $\pm C \times B = \pm A \times D$ по положенію. Слѣдовательно въ пропорціи $A \mp C : B \mp D = A : B$ произведеніе среднихъ равно произведенію крайнихъ , и пропорція истинна.

Слѣдствіе.

85) Ежели дано будетъ много содержаній между собою равныхъ , какъ $A:B$, $C:D, E:F, G:H$, то есть

$$A:B=A:B$$

$$C:D=A:B$$

$$E:F=A:B$$

$$G:H=A:B,$$

то будетъ $A \mp C + E \mp G : B \mp D + F \mp H = A : B$.

ТЕОРЕ-

ТЕОРЕМА 4.

86) Если будутъ четыре количества A, B, C, D пропорциональны, т. е. $A:B=C:D$ и одинакаго роду съ количествами пропорциональными P, Q, R, S , т. е. $P:Q=R:S$, то будетъ $AP:BQ=CR:DS$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Понеже

$$\begin{array}{ccccccc} A & : & B & = & C & : & D \\ P & Q & P & Q & C & D & C & D \end{array}$$

то по § 83 будетъ

$AP:BQ=CP:DQ$ и $CP:DQ=CR:DS$,
а когда два содержанія равны претъ-
ему, то оныя и между собою бу-
дутъ равны, слѣдовательно
 $AP:BQ=CR:DS$.

Слѣдствіе 1.

87) Если будетъ $A:B=C:D$

и $P:Q=R:S$

и притомъ $B=P$; то будетъ

$$A:Q=CR:DS,$$

и если будетъ $B=P$ и $C=S$ или $A=Q$ и $R=D$; то въ первомъ случаѣ произойдетъ

$$A:Q=R:D,$$

а во второмъ $P:B=C:S$.

Слѣд-

Слѣдствіе 2.

88) Ежели будетъ много пропорцій , напр :

$$A : B = C : D$$

$$E : F = G : H$$

$$I : K = L : M$$

то будетъ $AEL : BFK = CGL : DHM$, и ежели
будетъ $E = B$, $F = I$, то произойдетъ

$$A : K = CGL : DHM.$$

ОПРЕДѢЛЕНІЕ 15.

89) Ежели будетъ $A : B = K : L$

$$B : C = M : N$$

$$C : D = P : Q$$

$$D : E = R : S$$

т. е. терминъ послѣдующей содержа-
нія $A : B$ будетъ предвѣдущей содер-
жанія $B : C$, а сего послѣдующей бу-
детъ предвѣдущей содержания $C : D$, и
такъ далѣе. Попомъ всякое изъ сихъ
содержаній уравнено будетъ другимъ
содержаніямъ , какъ $A : B = K : L$, $B : C$
 $= M : N$, то содержаніе $A : C$ называется
сложенное [Composita] изъ содержаній
 $A : B$ и $B : C$, или изъ содержаній $K : L$
и $M : N$. Содержаніе $A : D$ будетъ сло-
жено изъ содержаній $A : B$, $B : C$, $C : D$,
или имъ равныхъ изъ содержаній $K : L$,
 $M : N$, $P : Q$, потому что въ первомъ
случаѣ будетъ $A : C = KM : LN$, а въ
другомъ $A : D = KMP : LNQ$ опре-

ОПРЕДѢЛЕНІЕ 19.

90) Если содержанія $A:B$, $B:C$, $C:D$, $D:E$ будутъ между собою равны, и слѣдовательно $K:L=M:N=P:Q=R:S$; тогда содержаніе $A:C$, которое сложено изъ двухъ равныхъ $A:B$ и $B:C$ называется удвоенное [duplicata] содержанія $A:B$ или $B:C$ или $K:L$ или $M:N$, потому что будетъ $A:C=KK:LL=MM:NN$. А если каковъ содержаніе сложено будетъ изъ трехъ какъ $A:B$, $B:C$, $C:D$, то содержаніе $A:D$ называется утроенное [Triplicata] содержанія $A:B$ или другого ему равнаго, потому что въ такомъ случаѣ будетъ $A:D=KKK:LLL$. А содержаніе $A:E$ будетъ учетыренное [Quadruplicata] содержанія $A:B$ или другого ему равнаго. А въ разсужденіи сихъ сложенныхъ содержаній содержаніе $A:B$ называется простое [simplex].

П р и м ѣ ч а н і е.

91) Всякое содержаніе сложено быть можетъ изъ многихъ другихъ и безчисленными образами. Пусть дано будетъ содержаніе $A:E$, и надлежало бы оное сложить

изъ четырехъ другихъ , то должно взять
при какіе нибудь терміна В, С, D , и пусть
будетъ $A : B = M : N$

$$B : C = O : P$$

$$C : D = Q : R$$

$$D : E = S : F$$

Содержаніе $A : E$ будетъ сложено изъ
четырехъ содержаній $A : B$, $B : C$, $C : D$,
и $D : E$, или имъ равныхъ $M : N$, $O : P$,
 $Q : R$, $S : T$. Подобнымъ образомъ можно его
здѣлать сложенымъ изъ двухъ , трехъ и
болѣе. И такъ всякое содержаніе смотря
на то , какъ изъ другихъ происходитъ , мо-
жетъ назваться простымъ , сложенымъ изъ
сколька нибудь содержаній , то есть удвоеннымъ
и утроеннымъ и проч :

ГЛАВА ТРЕТІЯ.

О ЛОМАНЫХЪ ЧИСЛАХЪ ИЛИ ДРОБЯХЪ.

ОПРЕДѢЛЕНІЕ 20.

92) Дробь *меньше единицы* или
истинная [*Fractio vera*] , въ которой
знаменатель больше , нежели числи-
тель , какъ напримѣръ $\frac{3}{4}$. Дробь *соль-*
ше единицы [*fractio frigia*] , въ которой
числитель больше знаменателя , какъ .
напри-

напримѣръ $\frac{3}{4}$. Дробь рацна единицѣ , въ которой знаменатель равенъ числителю, напримѣръ $\frac{6}{6}$, или $\frac{1}{1}$.

Примѣчаніе.

93) Происхождение дробей иныя производятъ отъ дѣленія , и называютъ дробь частнымъ числомъ , которое происходитъ отъ дѣленія , когда дѣлитель въ дѣлимомъ числѣ не совершенно нѣсколько разъ содержится , тогда дѣлитель будетъ знаменатель , а дѣлимое число числитель ; отъ сего видно , что дробь показываетъ , сколько разъ знаменатель содержится въ числителѣ.

94) Хотя и кажется , что сей способъ представлять дроби отъ перваго разнишя , однакожъ въ самомъ дѣлѣ оба совершенно между собою сходствуютъ. Чтобы сие сходство видно было , возьмемъ въ примѣръ дробь $\frac{5}{4}$, которая по прежнему опредѣленію (§ 9) значитъ , что когда цѣлое или единица , къ которой сія дробь относится , раздѣлится на четыре равныя части , и ихъ возмется 5 , то будетъ $\frac{5}{4}$. А по сему дробь $\frac{5}{4}$ означаетъ частное число , когда цѣлое 5 раздѣлится на 4 , или цѣлаго 5 ти возмется четвертая часть. Слѣдовательно въ послѣднемъ случаѣ $\frac{5}{4}$ означаетъ четвертую часть

часть числа 5 ; изъ сего видно , что ломаное число показываетъ такую часть верхняго числа , какую нижнее число означаетъ. Но 5 есть въптеро больше единицы , къ которой сие число относится , слѣдовательно и четвертая его часть будетъ въптеро больше четвертой части единицы. Изъ сего явствуетъ , что дробь $\frac{5}{4}$ или четвертая часть пяти единицъ равна пяти частямъ , которыхъ четыре составляютъ единицу , и сходство сихъ представлений видно. По сему все , что доказано выше сего о дѣлительнѣ и о дѣлимомъ числѣ вообще , поже и при дробяхъ или ломаныхъ числахъ мѣсто имѣть должно.

05) Дробь больше единицы можетъ раздѣлена быть на двѣ части , изъ которыхъ одна будетъ цѣлое число , а другая истинная дробь , для того что всякая дробь означаетъ частное число. И такъ когда дана будетъ дробь больше единицъ , то ничего больше не требуется , какъ раздѣлать обыкновенное дѣление. Напримѣръ $\frac{16}{5}$ показываетъ , что 16 должно раздѣлить на 5 , и частное число будетъ $3\frac{1}{5}$. Изъ сего видно , коимъ образомъ дробь больше единицъ превращается въ двѣ части. Сие дѣйствие называется изъ дроби больше единицъ *выключить цѣлое число*. Простиннымъ образомъ поступить надлежитъ , ежели надобно будетъ цѣлое число съ дробью преобразовать въ дробь больше единицъ. Надлежитъ

знаменателемъ дроби умножить цѣлое число, къ произведенію придашь числителя данной дроби, и подъ суммою подписать прежняго знаменателя. Напр: $\frac{1}{3}$ даетъ $4\frac{2}{3}$, что превращено будетъ въ дробь слѣдующимъ образомъ: $\frac{1 \times 3 + 2}{3} = \frac{5}{3}$. Обѣ сии перемѣны основаніе имѣютъ на дѣленіи: Когда дробь больше единицы раздѣляется на двѣ части, тогда не иное что дѣлается, какъ ищется частное число; А когда цѣлое число съ дробью приводится въ дробь, тогда находится дѣлимое число.

ЗАДАЧА 6.

96) Данныя дроби привести къ одинаковому знаменателю.

РѢШЕНІЕ.

Понеже частнаго числа или дроби сила не перемѣняется, когда знаменатель и числитель умножены будутъ на какое нибудь число (§. 60) и приводить дроби къ одинаковому знаменателю, есть превращать дроби въ другія имъ равныя, чѣмъ всѣ одинакія части цѣлаго показывали. Изъ сего видно, что ежели бы.

1) Даны были дроби $\frac{2}{3}$ и $\frac{3}{4}$, и когда первой дроби знаменателя и числителя умножишь знаменателемъ второй, то сила

о́я не переи́нится , и бу́детъ $\frac{2x_1}{3x_1} = \frac{2}{3}$.
 Такимъ же образомъ , когда второ́й
 дроби знаменателя и числителя умно-
 жишь на знаменателя перьвой дроби ,
 то она не переи́нится , и произой-
 детъ $\frac{3}{4} = \frac{3x_1}{4x_1}$, и данныя дроби превра-
 щены бу́дутъ въ слѣдующія $\frac{2x_1}{3x_1} = \frac{2}{3}$;
 $\frac{3x_1}{4x_1} = \frac{3}{4}$, у которыхъ знаменатели бу-
 дутъ одинаки.

2) Подобнымъ образомъ , ежели
 даны бу́дутъ три дроби , какъ $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{6}{7}$,
 или болѣе , приведены бу́дутъ къ оди-
 накому знаменателю. Оба знака перь-
 вой дроби должно умножить на зна-
 менателей второ́й и третей дроби ,
 и произойдетъ $\frac{2x_1x_2}{3x_1x_2}$. Потомъ вто-
 рой дроби оба знака должно умножить
 на знаменателей перьвой и третей дроби.
 И наконецъ оба знака третей
 на знаменателей перьвой и второ́й , и
 произойдетъ изъ перьвой $\frac{2x_1x_2}{3x_1x_2}$ изъ вто-
 рой $\frac{3x_1x_2}{4x_1x_2}$, а изъ третей $\frac{6x_1x_2}{7x_1x_2}$, и иско-
 мые дроби бу́дутъ $\frac{26}{14}$, $\frac{63}{14}$, $\frac{72}{14}$.

3) Изъ сего можно видѣть , какъ
 поступать должно , ежели случится
 А 3 больш-

большее число дробей. Надлежитъ всякой дроби умножитъ числитель и знаменатель на знаменатели прочихъ дробей , и что въ задачѣ требовалась , учинено будетъ.

ЗАДАЧА 7.

97) Дроби разныхъ знаменателей складывать.

РѢШЕНИЕ.

Какъ въ цѣлыхъ числахъ , такъ и здѣсь не отменно требуется , чтобъ дроби были одинакаго роду. Пусть будутъ данныя дроби $\frac{2}{7} + \frac{3}{9} + \frac{10}{12}$; Надлежитъ привести ихъ къ одинакому знаменателю , и произойдетъ $\frac{22}{36} + \frac{12}{36} + \frac{30}{36}$. Такимъ образомъ всѣ данныя дроби будутъ показывать одинакія части цѣлаго , то есть каждое ломаное число содержитъ столько частей цѣлаго , сколько показывалъ его числитель ; Чего ради складывать такія дроби не что иное есть , какъ сыскасть то , сколько всѣхъ такихъ частей числомъ находится , и для того ничего больше не требуется , какъ сложить всѣхъ

всѣхъ числипевей , и подѣ суммою
подписаць общаго знаменателя. По
сему искомая сумма будетъ $\frac{29+3}{12} = 2\frac{305}{12}$
(§ 93).

П р и м ѣ ч а н і е.

98) Ежели при дробяхъ случатся
цѣлые числа , то надлежитъ цѣлые сло-
жить особливо , и дроби особливо, Напри-
мѣръ , ежели бы дано было сложить $2\frac{1}{2} + 5\frac{1}{2}$
сумма будетъ $= 7 + \frac{1+1}{2} = 7\frac{2}{2} = 8$.

З а д а ч а 8.

99) Изъ данной дроби другую
данную вычесть.

р ѣ ш е н і е.

И здѣсь полагаю, что данныя дроби,
какъ въ прежней задачѣ , имѣютъ раз-
ныхъ знаменателей , и сумъ одного
роу . Пусть дроби будутъ $\frac{1}{2} - \frac{1}{4}$. Дол-
жно привести ихъ къ одинакому зна-
менателю , и произойдетъ $\frac{2}{4} - \frac{1}{4}$. Тог-
да будутъ они содержать равныя ча-
сти цѣлаго , каждая по столько ча-
стей , сколько показываетъ числитель ,
и вычитанъ должно числителя мень-

шаго изъ большаго , а подъ остаткомъ подписывать общаго знаменателя. Такимъ образомъ данныхъ дробей разность будетъ $\frac{10}{24} = \frac{5}{12}$.

Примѣчаніе 1.

100) Если при дробяхъ случатся цѣлые числа , то должно цѣлые изъ цѣлыхъ а дроби изъ дробей вычитать. Напримѣръ $4\frac{1}{3} - 2\frac{2}{3}$, остатокъ будетъ $= 2\frac{1}{3} = 2\frac{1}{3}$. А когда будетъ вычитаемая дробь больше той , изъ которой вычитаніе дѣлать должно , и при такихъ дробяхъ будутъ еще цѣлые числа , то отъ цѣлаго числа при меньшей дроби находящаяся занимается столько единицъ , сколько потребно , чтобъ вычитаніе дѣлать можно было. Напримѣръ $4\frac{1}{3} - 2\frac{2}{3} = 1\frac{4}{3}$.

Примѣчаніе 2.

101) Понеже ломаное число не перемѣняется , ежели оба его термина умножены будутъ на какое нибудь цѣлое число. Напримѣръ $\frac{N}{D} = \frac{M \times N}{M \times D}$ (§ 93 , 60). Изъ сего слѣдуетъ , что всякая дробь безчисленными образами изображена быть можетъ. Противнымъ образомъ такіе ломаные числа , которыхъ знаменатель и числитель состоятъ изъ многихъ знаковъ , можно изображать меньшимъ числомъ знаковъ , ежели оба ломаного числа

числа термины раздѣлены будутъ на числа, которыми термины умножены. Напримѣръ ломаное число $\frac{3}{4}$, когда оба его термины умножены будутъ M , взявши вмѣсто M какое нибудь число, напримѣръ 5 или другое какое, превратится въ равное себѣ въ $\frac{3M}{4M}$ или въ $\frac{15}{20}$. А когда ломаное ^и число $\frac{15}{20}$ числитель и знаменатель раздѣлены будутъ на 5, то произойдетъ прежнее $\frac{3}{4}$ ломаное число. Изъ сего явствуетъ, что когда какую нибудь дробь надобно изобразить меньшими числами, то должно искать число, на которое знаменатель и числитель предложенной дроби раздѣлены быть могутъ. Такое число называется *общей дѣлителемъ*; а *общей большей дѣлителемъ* [Divisor Communis Maximus] есть самое большое число, на которой данной дроби знаменатель и числитель раздѣлены быть могутъ.

102) Понеже дроби лучше понимаемъ, когда они малымъ числомъ знаковъ изображены бывающъ, то необходимо вѣдать должно, какъ предложенную дробь уменьшать, или находить большаго общаго дѣлителя.

ЗАДАЧА 9.

103) Даныи двѣ числаи
сыскать большаго общаго дѣлителя.

Д а

рѣше-

Р Ъ Ш Е Н І Е.

Изъ данныхъ двухъ чиселъ надлежитъ раздѣлитьъ большее на меньшее. Попомъ остатковъ произшедшей отъ дѣленія возми за дѣлителя, а прежняго дѣлителя за дѣлимое число и дѣлай новое дѣленіе. Такимъ образомъ продолжай дѣленіе принимая остатковъ отъ дѣленія произшедшей за дѣлителя, а дѣлителя самого за дѣлимое число въ слѣдующемъ дѣленіи, и сіе должно продолжатъ до тѣхъ поръ пока въ дѣленіи ничего неостанется. Тогда общей большей дѣлительъ будетъ дѣлительъ самаго послѣдняго дѣленія. Напримѣръ пусть дано будетъ сыскать общаго большаго дѣлителя чиселъ 64 и 2864. Должно 2864 раздѣлить на 64.

$$\begin{array}{r}
 64 \overline{) 2864} \quad (44 \\
 \underline{256} \\
 304 \\
 \underline{256} \\
 48 \\
 48 \overline{) 64} \quad | \quad 1 \\
 \underline{48} \\
 16 \\
 16 \overline{) 48} \quad | \quad 3 \\
 \underline{48} \\
 0
 \end{array}$$

1 остатковъ

2 остатковъ

Слѣ-

Слѣдовательно общей большей дѣлитель предложенныхъ чиселъ будетъ 16.

Примѣчаніе.

104) Когда общей большей дѣлитель найдется единица, то сіе показываетъ, что данные числа общаго дѣлителя не имѣютъ, ибо всякое число на 1цу и само на себя раздѣлено быть можетъ. Доказательство сего рѣшенія послѣ сообщено будетъ.

ЗАДАЧА 10.

105) / Данное ломаное число уменьшить, или изобразить меньшими числами.

РѢШЕНІЕ.

Сыскавъ по § 103 общаго большаго дѣлителя числителя и знаменателя данной дроби, раздѣли на него оба шермина ломанаго числа. Такимъ образомъ ломаное число изображено будетъ самыми малыми числами. Пустъ будетъ данное ломаное число $\frac{745}{759}$, котораго общей большой дѣлитель будетъ 69, и для того будетъ $\frac{745}{759} = \frac{60 \times 12}{65 \times 12} = \frac{5}{11}$.

При-

Примѣчаніе.

106) Когда случится уменьшать дробь больше единицы, то надлежитъ сперва выключить изъ оной цѣлое число, а потомъ искать, для истиннаго ломанаго числа большаго общаго дѣлителя.

ЗАДАЧА. II.

107) Данную дробь на другую умножить.

рѣшеніе и доказательство.

Пусть будетъ одно ломаное число $\frac{A}{B}$, а другое $\frac{M}{N}$, которые между собою умножить должно, и произведение пусть будетъ $=P$, по § 77 будетъ

$$1: \frac{A}{B} = \frac{M}{N} : P \text{ и}$$

$$\text{изъ } A:B=M:N \times P \text{ (§ 83)}$$

$$\text{слѣдовательно } A \times M = B \times N \times P \text{ (§ 80)}$$

$$\text{и } P = \frac{A \times M}{B \times N}$$

т. е. надлежитъ умножить числителей между собою и знаменателей порознь, произведение числителей дастъ числителя искомаго ломанаго числа, а произведение знаменателей дастъ знаме-

знаменателя. Напримѣръ пусть дано
будетъ умножить $\frac{3}{4}$ на $\frac{5}{6}$, произведе-
ніе будетъ $\frac{3 \times 5}{4 \times 6} = \frac{15}{24} = \frac{5}{8}$.

Слѣдствіе.

108) И такъ, когда цѣлымъ чи-
сломъ дробь, или дробью цѣлое число умно-
жать должно, въ такомъ случаѣ надлежитъ
только цѣлымъ числомъ умножить числи-
теля, и подъ произведеніемъ подписать
даннаго знаменателя.

ЗАДАЧА 12.

109) Данную дробь на другую
раздѣлить.

РѢШЕНІЕ И ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Пусть будутъ данные дроби $\frac{A}{B}$ и
 $\frac{M}{N}$, изъ которыхъ $\frac{A}{B}$ дѣлитель, а $\frac{M}{N}$ дѣ-
лимое число, частное искомое число
пусть будетъ $= Q$ по § 77 будетъ.

$$\frac{A}{B} : 1 = \frac{M}{N} : Q$$

$$A : B = M : NQ \quad (\S 83)$$

$$\text{и } ANQ = BM \quad (\S 80)$$

$$\text{Слѣдовательно } Q = \frac{B \times M}{A \times N}.$$

что есть должно знаменателемъ дѣли-
теля

теля умножить числителя дѣлимаго числа, попомъ числителемъ дѣлителя умножить знаменателя дѣлимаго числа. Первое произведение дастъ числителя искомой дроби, второе знаменателя. Напримѣръ пусть дано будетъ раздѣлить $\frac{2}{3}$ на $\frac{1}{4}$, частное число будетъ $= \frac{2 \times 4}{3 \times 1} = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}$.

Слѣдствіе.

110) Когда случится ломаное число дѣлить на цѣлое, то надлежитъ только умножить дѣлителемъ знаменателя предложенной дроби. Изъ сего также и по видно, какъ поступать должно, ежели дѣлитель будетъ ломаное число, а дѣлимое цѣлое.

Примѣчаніе.

111) Когда случится умножать или дѣлить цѣлое число съ дробью на цѣлое число съ дробью, то способѣ умноженіе и дѣленіе задѣлано быть можетъ, ежели въ первомъ случаѣ множитель и множимое число, а во второмъ дѣлитель и дѣлимое число превращены будутъ въ дроби напримѣръ пусть будетъ множитель $5\frac{1}{2}$, множимое число $12\frac{2}{3}$ вмѣсто того, чтобъ по частямъ умножать, надлежитъ

житѣ превратитѣ въ дробѣ оба фактора, и произойдетѣ $5\frac{4}{5} = \frac{29}{5}$; $12\frac{2}{3} = \frac{38}{3}$. Слѣдователь-
произведение будетѣ $= \frac{29 \times 38}{5 \times 3} = \frac{1102}{15} = 73\frac{7}{15}$ (§ 107). Пусть будетѣ дѣлитель $2\frac{2}{3}$, а дѣли-
мое число $= 5\frac{3}{4}$. Надлежитѣ сперва превра-
титѣ въ дробѣ, и будетѣ $2\frac{2}{3} = \frac{8}{3}$; $5\frac{3}{4} = \frac{23}{4}$.
Частное число будетѣ $= \frac{23 \times 3}{8 \times 4} = 2\frac{5}{32}$. (§ 109).

ГЛАВА ЧЕТВЕРТАЯ.

О ЧИСЛАХЪ КВАДРАТНЫХЪ И КУБИЧНЫХЪ.

ОПРЕДѢЛЕНІЕ 21.

112) Ежели какое нибудь число само на себя умножится, то произведе-
ние называется *квадратное число* [Numerus Quadratus] : Число, которое на себя умножится въ разсужденіи произве-
денія *корень квадратной* [Radix quadrata]. Напримѣръ числа 5 квадра-
тное число будетѣ 25, а корень 5.

ОПРЕДѢЛЕНІЕ 22.

113) Ежели квадратъ еще умно-
жится на корень, то произведение на-
зывается *кубъ* [Cubus], а корень въ
разсужденіи

разсужденіи куба называется **корень** **кубической** [Radix Cubica] такъ напр: 5 квадратъ есть 25, кубъ 125, а куба 125 корень кубической 5.

О П Р Е Д Ъ Л Е Н І Е 23.

114) Вообще произведенія произшедшіе изъ факторовъ между собою равныхъ называются **степенями** [Potentia seu Potestates]. **Вторая степень** [Pot: secunda] называется произведение происходящее отъ умноженія какого нибудь числа на себя, или когда число два раза въ умноженіе входитъ. **Третья степень** [Pot: tertia] когда поже число три раза входитъ въ умноженіе, и такъ далѣе. Такъ числа 4 вторая степень будетъ $4 \times 4 = 16$; третья степень $4 \times 4 \times 4 = 64$, четвертая степень $4 \times 4 \times 4 \times 4 = 256$. А самое число 4, въ разсужденіи 16ти называется **корень второй степени**, въ разсужденіи 64 будетъ **корень третьей степени**, и такъ далѣе.

П О Л О Ж Е Н І Е.

115) Когда какое нибудь число, примѣръ А на себя умножится, по
квадратъ

квадратъ онаго означается слѣдую-
щимъ образомъ : AA или A^2 , кубъ A^3 ,
биквадратъ или четвертая степень оз-
начается чрезъ A^4 и далѣе , такъ что
число въ верху корня отъ правой руки
приписанное означаетъ всегда степень ,
и называется *экспонентъ* или *указа-
тель степени* [*Exponents*].

ОПРЕДѢЛЕНІЕ 24.

116) *Изплекать корень квадратной* [*Extrahere Radicem quadraticam*] изъ
числа какого нибудь , есть способъ нахо-
дить число , которое на себя будучи ум-
ножено , дастъ самое предложенное чи-
сло. *Изплекать корень кубической*
[*Radicem cubicam*] будетъ способъ находить
число , котораго квадратъ умноженной
на найденное число , дастъ самое пред-
ложенное.

ПОЛОЖЕНІЕ 5.

117) Когда изъ какого нибудь
числа , наприимѣръ A должно изпечь
корень квадратной , то сіе озна-
чается слѣдующимъ образомъ \sqrt{A}
Е . или

или просто $\sqrt[n]{A}$. А когда должно извлечь корень кубичной, то означается, какъ слѣдуетъ, $\sqrt[3]{A}$. Биквадратной $\sqrt[4]{A}$, или вообще $\sqrt[n]{A}$, ежели за n поместя какое нибудь число. Сей знакъ особливо употребляется при такихъ числахъ, изъ которыхъ совершенно корня извлечь не можно, напр: $\sqrt{2}$, $\sqrt{7}$. Такие числа называются ирраціональные или глухія [Irrationales или surdi]. А знакъ $\sqrt{}$ называется радикальной.

Примѣчаніе.

118) Всякаго числа чрезъ умноженіе можно найти всякую степень; Напротивъ того не столь легко изъ даннаго числа корень какой нибудь извлечь можно, на пр: квадратной или кубичной. Понеже въ общемъ житіи сіи два извлеченія не рѣдко случаются, то не обходимо надлежитъ показать, какъ извлекать должно изъ даннаго числа корень квадратной или кубичной.

ТЕОРЕМА 1.

119) Ежели какое нибудь число M раздѣлено будетъ на двѣ части ▲

А и В , то есть , что бы было $M = A + B$; то квадратъ сего числа состоятъ будетъ изъ квадрата первой части , изъ произведенія обѣихъ частей дважды пятаго , и изъ квадрата последней части , то есть

$$M^2 = A^2 + 2AB + B^2$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Чтобъ найти M^2 должно $A + B$ умножить на $A + B$. И такъ должно сперва умножить $A + B$ на A , произведение будетъ $A^2 + AB$, потомъ $A + B$ умножить на B , и найдемся произведение $AB + B^2$. Сумма сихъ произведений должна быть равна произведению $A + B$ на $A + B$, то есть $MM = (A + B)^2 = AA + AB + AB + BB = AA + 2AB + BB$.

Слѣдствіе 1.

120) По сему всякаго числа квадратъ найти можно. Пусть будетъ данное число 25 , раздѣли его на двѣ части $20 + 5$, и квадратъ его будетъ состоятъ

изъ \square первой части	$20 \times 20 = 400$
изъ произведенія частей 2жды взятаго	$40 \times 5 = 200$
изъ \square послѣдней части	$5 \times 5 = 25$
Искомой квадратъ будетъ	<u>625</u>

Слѣдствіе 2.

121) Подобнымъ образомъ можно квадратъ найти и другаго всякаго числа, въ которомъ не только десятки, но и сотни, тысячи и всякаго вышшаго знаменованія единицы находятся. Пусть будетъ число, котораго квадратъ сыскать должно 35462. Начиная отъ лѣвой руки надлежитъ взять первые два знака 35, и представить въ умѣ, будно бы другихъ не было, и искать по § 119, 120 оныхъ квадратъ. Въ силу онаго число 35 должно раздѣлить на двѣ части, какъ слѣдуетъ $30+5$, и квадратъ 35 будетъ состоять изъ квадрата 30, изъ произведенія 30×5 дважды взятаго, и изъ квадрата 5: такимъ образомъ найдется квадратъ $35 = 1225$. Теперь къ 35 надлежитъ присовокупить слѣдующей знакъ даннаго числа, и будетъ 354. Чтобъ сего числа найти квадратъ, должно оное раздѣлить на двѣ части, какъ слѣдуетъ $350+4$. И какъ прежде квадратъ 354 будетъ состоять изъ квадрата 350, изъ произведенія 350×4 дважды

взятаго,

девяти знаковъ будутъ извѣстны. Когда надобно изъ даннаго числа найти корень, то должно поступать противнымъ образомъ, т. е. что здѣсь придавано, то въ извлеченіи вычиташъ надлежитъ.

Таблица квадратовъ и кубовъ первыхъ девяти знаковъ.

Корни	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Квадраты	1	4	9	16	25	36	49	64	81
Кубы	1	8	27	64	125	216	343	512	729

ЗАДАЧА 13.

123) Изъ даннаго квадратнаго числа извлечь корень квадратной.

рѣшеніе.

Пусть будетъ данное число 1257553444. Прежде всего надлежитъ данное число раздѣлить на классы, начиная дѣленіе отъ правой руки къ лѣвой, такъ чѣмъ въ всякомъ классѣ находилось по два знака, выключая послѣдней, въ которомъ и одинъ случится можетъ.

	12	57	55	34	44	(35462
	9					
6)	3	57				
	3	0				
		25				
70)		32	55			
		28	0			
			16			
708)		4	39	34		
		4	24	8		
				36		
7092)		14	18	44		
		14	18	4		
				4		
				0		

Потомъ 1) въ таблицѣ квадратовъ и кубовъ сыщи квадраты ближайшей къ знакамъ находящимся въ первомъ онѣ лѣвой руки классѣ. Въ семъ случаѣ будетъ 9. Корень его 3 напиши возлѣ послѣдней черпы онѣ правой руки, а квадраты выпиши изъ знаковъ въ первомъ классѣ находящихся, и останется 3.

2) Къ остатку присовокупи слѣдующаго класса первой знакъ, и будетъ 35; потомъ найденной первой

знакъ корня умножь на 2, и спрашивай, сколько разъ произведение 6 въ 35 содержится. Частное число 5 будетъ второй знакъ корня, которое должно написать на второмъ мѣстѣ.

3) Подъ 35, какъ подъ дѣлимымъ числомъ, подпиши произведение найденнаго частнаго числа на дѣлителя, потомъ къ 35 присовокупи и второй знакъ класса, а къ произведению найденнаго частнаго числа на дѣлителя, приложи квадратъ частнаго новаго числа, такъ чтобъ послѣдней знакъ квадрата соотвѣтствовалъ послѣднему знаку класса, и сумму выпиши изъ 357, въ остаткѣ будетъ 32.

4) Къ сему остатку присовокупи первой знакъ слѣдующаго класса, и будетъ 325; и какъ прежде умноживъ найденную часть корня 35 на 2, спрашивай, сколько разъ сие произведение, которое обыкновенно, какъ дѣлитель, отъ лѣвой стороны пишется, содержится въ 325: частное число 4 будетъ третьей знакъ корня.

5) Подъ числомъ 325 подпиши произведение частнаго числа на дѣлителя,

теля , наблюдая всегда то , что первой знак от правой руки произведения соответствовалъ первому знаку класса . Снеси потомъ и другой знакъ класса , чтобы было 3255 , и къ упомянутому произведению придай квадратъ новаго частнаго числа , такъ чтобы послѣдней знакъ квадрата соответствовалъ послѣднему знаку класса , и сумму вычти изъ 3255 , останется 339 .

б) Къ остатку принадлежитъ присовокупить первой знакъ слѣдующаго класса , и такимъ же образомъ , какъ выше дѣлано , продолжать извлечение далѣе , и найдется искомой корень предложеннаго числа 35462 .

П р и м ѣ ч а н і е .

124) Въ самомъ рѣшеніи содержится и доказательство . Всѣ знаки корня найдены противнымъ тому образомъ , какъ искали въ § 121 квадратъ даннаго числа . Кто снесетъ сіе извлечение съ дѣйствіемъ въ § 121 изображеннымъ , тотъ въ тонкость уразумѣетъ показанное извлечение . При нахожденіи частнаго числа не всегда такъ поступать , какъ въ простомъ дѣленіи пока-

зано, но при томъ должно смотрѣть иногда на слѣдующей знакъ класса, и на сумму, которая вычитается, то есть на произведение изъ частей дважды взятое и сложенное съ квадратомъ послѣдней части. Если сія сумма будетъ больше, нежели число, изъ котораго вычитать надлежитъ, то хотя бы частное число было и справедливо, однакожъ должно будетъ задавать меньшимъ знакомъ.

125) Когда случится, что въ остаткѣ вмѣстѣ съ присовокупленнымъ слѣдующаго класса первымъ знакомъ произведение найденной уже части корня 2 жды взятое не содержится ни разу, то написавши въ корнѣ надлежитъ еще снести два знака послѣдующаго класса, напримѣръ:

$$\begin{array}{r}
 9 \overline{) 6348163104} \\
 \underline{9 } \\
 63 \\
 \underline{63 } \\
 0 \\
 620 \\
 \underline{2 } \\
 2 \\
 \underline{2 } \\
 0
 \end{array}$$

Слѣдствіе.

126) Понеже квадратъ дроби, напримѣръ, находящійся, ежели числитель и знаменатель

ля возмешь квадраты , квадратъ числителя дастъ числителя , и квадратъ знаменателя дастъ знаменателя искомой квадрата дроби $\frac{25}{49}$. Слѣдовательно когда изъ дроби должно корень извлекать , то должно извлечь изъ числителя особливо , изъ знаменателя особливо.

Примѣчаніе.

127) Понеже не всѣ числа суть совершенные квадраты , то есть не производятъ чрезъ умноженіе какого нибудь числа на себя , то и корней совершенныхъ не всѣхъ чиселъ имѣть можно. Однакожъ можно найти такой корень , которой бы отъ совершеннаго чувствительно не разнился , что показано будетъ въ слѣдующемъ предложеніи :

ЗАДАЧА 14.

128) Изъ числа , которое не совершенной квадратъ , извлечь корень квадратной , которой бы безъ чувствительной погрѣшности за истинной принять можно было.

Рѣшеніе.

Данное число раздѣли на классы , и къ нимъ придай отъ правой руки столько классовъ нулей , сколько за благо

благо разсудится. Потомъ извлекай корень изъ числа, какъ выше показано, и когда всѣ его классы будутъ снесены, то начинай сносить и приданные классы нулей, и съ ними поступай такъ, какъ въ § 123 показано. Понеже приданные нули въ числѣ означали десятичные дроби, и всякой классъ даетъ одинъ знакъ въ корнѣ, то первой классъ нулей дастъ въ корнѣ знакъ для десятичныхъ, второй для сотенныхъ, третей для тысячныхъ, и такъ далѣе. Пусть будетъ данное число 549. Понеже оно не совершенной квадратъ, то придай нѣсколько классовъ нулей, какъ слѣдуетъ,

5|49,|00,|00|00|00|00|00|

и найдется искомой корень 23,430748, которой когда на себя умножишь, то хотя произведение и не будетъ точнѣе самое число, однакожъ разность такъ мала, что ее оставить безъ погрѣшности можно.

П р и м ѣ ч а н і е.

129) Изъ сего можно видѣть, какъ должно извлекать корень квадратной изъ
такого

такого числа, при которомъ находятся десятичные дроби. Надлежитъ цѣлые числа раздѣлить на классы особливо, и знаки означающіе десятичные дроби особливожъ, начиная дѣленіе въ десятичныхъ дробяхъ отъ лѣвой руки. Пусть будетъ данное число 804, 3402,682, которое раздѣленное на классы будетъ 804,34'02'682. А когда въ послѣднемъ классѣ останется одинъ знакъ, то оной классъ дополняется нулемъ. Корень данного числа буаетъ 28,3608.

ТЕОРЕМА 6.

130) Если какое нибудь число M раздѣлено будетъ на двѣ части A и B , такъ чтобъ было $M=A+B$; то будетъ кубъ онаго числа состоять изъ куба лѣвой части, изъ произведенія квадрата лѣвой части на вторую трижды пятаго, изъ произведенія квадрата послѣдней части на лѣвую трижды пятаго, и изъ куба послѣдней части, то есть $M^3=A^3+3AAB+3BBA+B^3$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Понеже кубъ происходитъ, когда квадратъ умножится на корень, т. е. когда $M^2=AA+AB+BB$ умножится на $M=A+B$. Слѣдовательно должно AA
+

$+2AB+BB$ умножить на $A+B$, что учинится умножая $(A+B)^2$ сперва на A , потом на B , сумма произведений будет $=(A+B)^3$.

$$(AA+2AB+BB) \times A = A^3 + 2AAB + ABV$$

$$(AA+AB+BB) \times B = AAB + 2ABV + B^3$$

$$\text{и такъ будетъ } M^3 = (A+B)^3 = A^3 + 3AAB + 3ABV + B^3$$

Слѣдствіе 1.

136) По сему всякаго числа кубъ, такъ какъ прежде квадратъ, найти можно. Пусть данное число будетъ 34. Раздѣли оно на двѣ части 30+4, поступая по § 130: кубъ сего числа найдется слѣдующимъ образомъ:

$$\text{Кубъ первой части} \quad 30 \times 30 \times 30 = 27 \dots$$

Произв: \square первой части

$$\text{на вт: 3 взят.} \quad 3 \times 30 \times 30 \times 4 = 108 \dots$$

Произв: \square втор: части

$$\text{на перв: 3 взят:} \quad 3 \times 4 \times 4 \times 30 = 144 \dots$$

$$\text{Кубъ второй части} \quad \underline{4 \times 4 \times 4 = 64}$$

$$\text{и такъ кубъ даннаго числа будетъ } = 39304$$

Слѣдствіе 2.

132) Подобнымъ образомъ не трудно будетъ найти кубъ такого числа, которой состоятъ изъ большаго числа знаковъ, на-
примѣръ

примѣръ 456. Возми первые два онѣ лѣвой руки знака , и ищи оныхъ кубъ по прежнему , раздѣливши первые два знака на двѣ части 40+5. Кубъ 45 будетъ состоять изъ куба первой части $\text{---}64000$. Изъ произведенія квадрата первой части на вторую трижды взятаго $3 \times 1600 \times 5 \text{---} 24000$; изъ произведенія квадрата второй части на первую трижды взятаго $3 \times 5 \times 5 \times 40 \text{---} 3000$, и изъ куба послѣдней части $\text{---}125$. И такъ кубъ 45 будетъ $\text{---}91125$. Присовокупи теперь и слѣдующей знакъ , чтобъ было 456 , и раздѣли на двѣ части , какъ слѣдуетъ , 450+6 , и такъ кубъ числа 456 будетъ состоять изъ куба 450 , изъ произведенія квадрата первой части на вторую трижды взятаго $3 \times 450 \times 450 \times 6 \text{---} 364500$, изъ произведенія квадрата послѣдней части на первую трижды взятаго $3 \times 450 \times 6 \times 6 \text{---} 48600$, и изъ куба послѣдней части $\text{---}216$. Такимъ образомъ кубъ искомаго числа будетъ 94818816. Образецъ дѣйствія , въ которомъ всѣ сложенія къ концу оставлены.

64	
24	
3	
	125
3	645
	486
	216
94 818 816.	

При-

Примѣчаніе.

133) Изъ сего можно видѣть, что должно дѣлать, когда дается изъ какого либо числа извлечь корень кубичной, потому что извлеченіе должно быть противное сему дѣйствію. Надлежитъ при извлеченіи по вычитанію, что здѣсь придавано.

134) Дѣленіе на части можетъ быть учинено и другимъ образомъ, на примѣрѣ 24 можетъ раздѣлено быть на $20+4$, на $15+9$, на $12+12$ и прочая. Однакожъ первое къ произведенію степеней способнѣе прочихъ, и свойство ихъ изъ сего раздѣленія виднѣе.

ЗАДАЧА 15.

135) Изъ даннаго кубичнаго числа извлечь корень кубичной.

рѣшеніе.

Пусть данное число будетъ 94818816, которое прежде всего должно раздѣлить на классы, начиная дѣленіе отъ правой руки къ лѣвой, такъ чтобъ во всякомъ классѣ находилось по три знака, выключая послѣдней, въ которомъ одинъ или два останутся могутъ.

$$\begin{array}{r}
 94 \overline{) 818} \quad 816 \quad) 456 \\
 \underline{64} \\
 48 \overline{) 30} \quad 818 \\
 \underline{24} \\
 3 \\
 \underline{125} \\
 27 \overline{) 125} \\
 \underline{3} \quad 693 \quad 816 \\
 \quad 645 \quad 0 \\
 \quad 48 \quad 60 \\
 \quad \underline{216} \\
 \quad 3 \quad 693 \quad 816 \\
 \quad
 \end{array}$$

1) Сыщи въ таблицѣ кубъ , которои ближе всѣхъ подходитъ къ знакамъ , въ первомъ опѣ лѣвой руки классѣ находящимся. Корень его напиши отъ правой руки подлѣ послѣдней черпы , а самой кубъ вычпи изъ знаковъ перваго опѣ лѣвой руки класса. Въ семъ случаѣ корень будетъ 4 , а остатокъ 30.

2) Къ остатку присовокупи первой знакъ слѣдующаго класса , и будетъ 308 , потомъ спрашивай , сколько разъ въ 308 содержится квадратъ найденной первой части прижды взятой.

Ж

Частное

Частное число 5 дасть второй знакъ въ корнѣ: умноживши имъ дѣлителя, которой обыкновенно по лѣвую сторону пишется, произведение подпиши подъ 308, такъ чтобъ первой знакъ произведенія отъ правой руки соответствовалъ первому знаку класса.

3) Присовокупи другіе оба знака, и будетъ 30818: произведение квадрата послѣдней части корня на первую 3жды взятое; подъ 30818 такъ подписать должно, чтобъ первой знакъ сего произведенія отъ правой руки соответствовалъ второму знаку класса.

4) Помощь возми кубъ послѣдней части, и подъ прежними произведеніями такъ подпиши, чтобъ первой знакъ отъ правой руки соответствовалъ послѣднему знаку класса. Всѣ сии при произведенія сложи въ одну сумму, и выпиши изъ соответствующихъ знаковъ куба, остатокъ будетъ 3693.

5) Къ сему остатку припиши первой знакъ слѣдующаго класса, то

то будетъ 36938 , и спрашивай , сколько разъ квадратъ найденной части корня прижды взятой въ семь чиселъ содержицца ? Частное число 6 дастъ претей знакъ корня. Найденнымъ частнымъ числомъ умножь дѣлителя , произведение подпиши , такъ чпобъ первой знакъ произведенія отъ правой руки соотвѣтствовалъ первому знаку класса.

6) Снеси потѣмъ и другіе два знака , чпобъ было 3693816 , и произведение квадрата новаго частнаго числа на прочіе знаки корня прижды взятое подпиши такъ , чпобъ первой знакъ произведенія соотвѣтствовалъ среднему знаку новаго класса , потѣмъ кубъ послѣдней части подъ прочими произведеніями подпиши такъ , чпобъ первой знакъ отъ правой руки соотвѣтствовалъ претъему знаку класса.

7) Всѣ сіи произведенія сложи въ одну сумму , и выпиши изъ соотвѣствующихъ знаковъ куба , и найдется искомой корень 456. Подобнымъ образомъ продолжать должно извлечение далѣе при другихъ случаяхъ , наблюдая предписанная здѣсь правила.

Примѣчаніе.

136) Доказательство сего рѣшенія
яснѣе можно видѣть, ежели снесешь оное съ
дѣйствіемъ въ § 132 описаннымъ. Впрочемъ,
что говорено о квадратахъ отъ § 124 даже до
§ 129; тожъ должно разумѣть и о кубахъ,
и при томъ упомянуть должно, что когда не
изъ совершеннаго куба извлекается корень,
и требуется аккуратнѣйшей, то для всяка-
го класса приписывается по три нуля.

Примѣръ.

$$\begin{array}{r}
 9 \overline{) 541000000} \quad 21,209 \\
 \underline{8} \\
 12 \overline{) 1541} \\
 \underline{12} \\
 6 \\
 \underline{1} \\
 1323 \overline{) 280000} \\
 \underline{2646} \\
 252 \\
 \underline{8} \\
 267128 \\
 33483200 \overline{) 1287200000} \\
 \underline{121348800} \\
 515160 \\
 \underline{729} \\
 12140032329
 \end{array}$$

Примѣ-

Примѣчаніе.

137) Чтобы узнать, справедливо ли извлеченіе квадрата или куба, заѣлано, надлежитъ въ первомъ случаѣ взять квадратъ найденнаго корня, и къ нему прижать остатокъ произшедшей отъ извлеченія. Если такимъ образомъ найденное число равно будетъ данному, то извлеченіе заѣлано будетъ вѣрно. Въ другомъ случаѣ должно взять найденнаго корня кубъ, и къ нему прижать оставшееся послѣ извлеченія число. Если найденное число будетъ равно данному, то извлеченіе заѣлано будетъ вѣрно. А когда послѣ извлеченія никакого остатку не имѣется, то въ первомъ случаѣ квадратъ корня, а въ другомъ кубъ долженъ быть равенъ данному числу.

ТЕОРЕМА 7.

138) Если какого нибудь цѣлаго числа не имѣется сопряженнаго корня въ цѣлыхъ числахъ, то не можетъ быть и въ дробяхъ.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Пусть будетъ дробь совершенной корень какого нибудь числа, то отъ умноженія сей дроби на себя должно про-

изойщи данное цѣлое число. Но сколько дробь саму на себя ни умножишь, произведение всегда будетъ дробь, а не цѣлое число. Слѣдовательно, когда данное число есть цѣлое, то совершенной онаго числа корень дробь быть не можетъ.

ГЛАВА ПЯТАЯ.

о употреблении пропорцій въ общемъ
жизни.

ЗАДАЧА 16.

139) Между двумя данными числами A и B найти среднее пропорциональное P .

рѣшеніе.

По § 81 должно быть $AB = PP$, и такъ ежели съ обѣихъ сторонъ извлечешь корень квадратной, то найдется $P = \sqrt{AB}$. Изъ сего видно, что дѣлать надлежитъ, когда должно найти среднее пропорціональное число. Пусть бу-
детъ

дети $A=8$, а $B=72$, буди $AB=PR$
 $=576$ и $P=\sqrt{AB}=24$.

Примѣчаніе.

140) Среднее пропорциональное число совершенное тогда только имѣть можно, когда произведение крайнихъ буди совершенной квадратъ, какъ въ примѣрѣ случилось. равнымъ образомъ между 2 и 8 среднее пропорциональное буди 4. Когда произведение не буди квадратъ, въ такомъ случаѣ, чтобъ имѣть хотя нѣсколько аккуратное среднее пропорциональное число, должно поступать по § 128. Напримѣрѣ ежели бы надлежало найти среднее пропорциональное между 2 и 10, оно помщи десятичныхъ дробей изображено буди слѣдующимъ образомъ. 4, 47224.

ЗАДАЧА 17.

141) Даннымъ тремъ количествомъ найти четвертое пропорциональное; или даннымъ двумъ найти третье.

Рѣшеніе.

Когда четыре количества числами изображенные составляютъ между собою пропорцію, то произведение среднихъ

нихъ должно быть равно произведению крайнихъ (§ 80) и для того, ежели данныя количества изображены будутъ числами A , B и C , а искомое X , то должно быть $A:B=C:X$, и $A \times X = B \times C$; раздѣливши съ обѣихъ сторонъ на A будетъ $X = \frac{B \times C}{A}$, то есть произведеніе втораго и третьяго данныхъ чиселъ должно раздѣлить на первое: Пусть будетъ $A=5$; $B=15$; $C=11$, четвертое пропорціональное будетъ $X = \frac{B \times C}{A} = 33$. Ежели будетъ $B=C=15$, то найдется $X = \frac{B \times C}{A} = 45$.

Слѣдствіе.

$$\begin{aligned} 142) \quad & \text{Ежели будетъ } m:n=A:B \\ & p:q=B:C \\ & r:s=C:D \\ & t:u=D:E \end{aligned}$$

то будетъ $B = \frac{nA}{m}$, $C = \frac{qB}{p} = \frac{nqA}{mp}$, $D = \frac{sr}{t}$, $E = \frac{u}{t} D = \frac{nqsu}{mprt} A$ или $\frac{mprt}{nqsu} E$, то есть $mprt: nqsu = A:E$. Симвъ изъясняется то, что говорено было выше сего въ § 80, 90, 91. Ошкуду явствуетъ, что ежели дано будетъ нѣсколько содержаній подобнаго свойства, и предвѣдущей терминъ A сложенъ нага

наго содержания, то послѣдующей Е най-
дется посылкою.

т прі : пріу — А : Е

какъ произведеііе всѣхъ предвѣдущихъ къ
произведенію всѣхъ послѣдующихъ данныхъ
содержаній, такъ предвѣдущей содержанія
сложеннаго къ своему по слѣдующему Е.

П р и ж ѣ ч а н і я.

143). Способъ извѣданныхъ трехъ чи-
селъ находить четвертое присутіиальное,
называется *правило тройное* [Regula trium]
которое для великаго въ общемъ житіи упо-
требленія называется и *золотое* [aurea].
Понеже всѣ количества изображаются числа-
ми, то когда количества будущъ пропор-
ціональны, непремѣнно и числа пропорціо-
нальны быть должны. По сему, ежели из-
вѣстно, что содержаніе искомаго количества
къ другому данному, есть похъ, каксе
между данными двумя числами, то можно
найти число, которымъ изображено будетъ
искомое количество по § 141. Но содержаніе
разныхъ количествъ должно заимствовать изъ
другихъ наукъ, съ Ариметикѣ оныхъ пока-
зать не можно. Напримѣръ ежели бы дано
было что изъ сосуда какого нибудь, когда
онъ еще полонъ, въ двѣ минушы выплекаетъ
ж ; вода

воды пять кружек, и найти бы должно было, во сколько времени вытечет 250 кружек. В сем случа даны три числа, которыми должно найти четвертое пропорциональное. Но понеже известно, что вода с самаго начала скорѣ течетъ, нежели на исходѣ, слѣдовательно количество вытекающей воды не пропорционально времени. И для того прежде, нежели изъ Гидростатики известно будетъ, какимъ образомъ вода вытекаетъ, сего вопросу рѣшить не можно.

144) Множество находится и другихъ подобныхъ сему вопросовъ. Не смотря на сие, многихъ количествъ случающихся въ общемъ жити, содержанія всякому почти известны. Содержание денегъ, вѣсовъ, мѣръ и проч. Ежели бы дано было какое нибудь количество P числомъ изображенное, которое бы къ известной единицѣ A относилось, и тожъ бы количество принадлежало изобразить числомъ, которое бы къ другой единицѣ B относилось, а содержаніе единицъ A и B известно бы было, т. е. известно бы было, что m единицъ какова есть A составляютъ количество Q , и тожъ количество Q составляютъ n единицъ, какова есть B , въ такомъ случаѣ по § 141 искомое легко найти можно будетъ, потому что какъ m содержится къ числу единицъ A въ количествѣ данномъ содержащихся, такъ n будетъ содержаться къ искомому числу единицъ

ницѣ В. Такѣ напримѣрѣ , пусть дано бы было 25 червонныхъ , и спрашивалось бы , сколько въ нихъ будетѣ рублей. Понеже извѣстно , что 4 червонныхъ составляющѣ 9 рублей то по тройному правилу должно будетѣ посматѣ.

Какѣ 4 къ 25 , такѣ 9 къ числу рублей искомому , и найдется , что въ 25 червонныхъ будетѣ $56\frac{1}{4}$ рублей.

145) Понеже равныхъ дробей , какѣ $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ числитель одной А содержится къ своему знаменателю В , такѣ числитель другой дроби С къ своему знаменателю D : то ежели данной , какой нибудь дроби надлежитѣ сыскать равную другую , которой знаменатель дается , то числитель найдется слѣдующимъ образомъ : Какѣ знаменатель дроби данной къ своему числителю , такѣ знаменатель другой дроби къ искомому числителю. Такѣ напримѣрѣ , ежели бы дана была дробь $\frac{3}{5}$, и надлежало бы ее превратить въ другую , у которой знаменатель былѣ бы 9 , то числитель такой дроби будетѣ $= \frac{3 \times 9}{5} = \frac{27}{5} = 5\frac{2}{5}$, и искомая дробь бу-

детѣ $\frac{5\frac{2}{5}}{9}$. Ежели бы напримѣрѣ $\frac{5}{9}$ означало

части червонца , котораго девятая часть дѣлаетѣ четверть рубля , то найденная дробь

$5\frac{2}{5}$

5² означала бы 5² полуполтинниковъ. Подобнымъ образомъ количество, числамъ изъ разнаго роду единицъ состоящими, изображенное, можно будетъ изобразить числами, которыхъ единицы будутъ одинаки. Сумма какая нибудь денегъ состоящая изъ червонцовъ, рублей, гривенъ, копѣекъ, можетъ изображена быть суммою изъ однихъ копѣекъ состоящею, и сумма изъ копѣекъ состоящая можетъ раздроблена быть на гривны, рубли и червонцы. Тоже должно разумѣть о мѣрахъ и о вѣсахъ.

146) Отсюда можно видѣть, какимъ образомъ, когда числа разлнчнаго наименованія сложены, или одно изъ другаго вычтено, числа меньшаго наименованія обра- щать должно въ числа большаго наименованія, ежели содержаніе единицъ, къ которымъ относятся, извѣстно. Пусть будетъ дано сложить :

3	пуд:	12	фунт:	35	лот:	7 $\frac{1}{2}$	золот:
2		39		101		12 $\frac{1}{2}$	
1		75		95		13 $\frac{3}{8}$	
<hr/>							
6		126		231		34 $\frac{1}{2}$	
<hr/>							
9		13		18		1 $\frac{1}{2}$	

Числа во всякомъ столбцѣ находящіяся складывая такъ, какъ показано выше сего, начиная

Начиная отъ чиселъ самаго меньшаго наименованія, и произойдетъ во первыхъ $34\frac{1}{12}$. Изъ найденной суммы выключить должно, сколько можно, единицъ слѣдующаго наименованія. А понеже 3 зол: составляютъ одинъ лотъ, то въ 34 зол: будетъ 11 лотовъ, кои должно приложить къ лотамъ, и останется только, $1\frac{1}{12}$ зол: Потомъ складывая числа слѣдующаго большаго наименованія, и произойдетъ 231, а съ произшедшими отъ золотниковъ лотами будетъ 242 лота, которые, понеже 32 лот: дѣлаютъ одинъ фунтъ, дадутъ 7 фунт: а въ остаткѣ будетъ 18 лот: которые подпиши подъ лотами; а 7 фунтовъ приложи къ фунтамъ. Сумма въхъ фунтовъ будетъ 126, а съ произшедшими отъ лотовъ фунтами 133. Но понеже 40 фунт: составляютъ одинъ пудъ, то 133 фунт: дѣлаютъ 3 пуда и 13 фунтовъ, которые должно подписать подъ фунтами. Наконецъ ежели сложить пуды произойдетъ 6, и придашь 3 пуда, отъ фунтовъ произшедшіе, найдется 9 пудъ, и искомая сумма будетъ 9 пуд: 13 фунт: 18 лот: $1\frac{1}{12}$ зол.

147) Когда извѣстно, какъ числа меньшаго наименованія обращать должно въ числа большаго знаменованія, то какъ при вычитаніи поступать надлежитъ всякъ разсудить можетъ. Одно только то упомянуть должно, что когда случится вычитаніе

еое число больше верхняго, тогда отъ числа въ слѣдующемъ столбцѣ находящагося занимается столько единицъ, чтобъ вычитаніе здѣлашь можно было. Напримѣръ:

изъ 13 фунт:	24 лот:	29 $\frac{1}{2}$ зол:
должно вычесть 9	38	8 $\frac{1}{2}$
3	18	20 $\frac{7}{8}$
изъ 3 фунт:	24 лот:	2 $\frac{1}{2}$ зол:

то есть ежели золотники изъ золотниковъ обыкновеннымъ образомъ вычесть, произойдетъ 20 $\frac{7}{8}$ зол: Потомъ надлежалобы 38 лотъ: вычесть изъ 24, но понеже сего учинить не возможно, займи отъ ~~злата~~ ^{фунта} одинъ фунтъ, которой составитъ 32 лота, а ежели одного не довольно будетъ, то два или три и болѣе; и найдется 18 лотовъ. Наконецъ 9 фунт: должно будетъ вычитать уже изъ 12 фунт: и произойдетъ 3 фунта, но понеже 3 зол: составляютъ 1 лотъ, то 20 зол: здѣлаютъ 6 лотъ: и 2 зол. и такъ остатокъ будетъ 3 фунт: 24 лот: и 2 $\frac{1}{2}$ зол:

148) Наблюдая вышереченное, употреблять можно буде въ правило тройное при покупкахъ и продажахъ, и симъ подобныхъ случаяхъ. Ежели дана будетъ цѣна и количество товару какого нибудь, то по тройному правилу найти можно цѣну тако^{му} товару, какое бы количество оного ни было. На примѣръ ежели бы пять аршинъ сукна продавались

• давались по 14 руб: спрашивается, сколько должно бы было заплатить за 17 аршинъ тогожъ сукна? Понеже цѣна 5ти аршинъ со- держится къ цѣнѣ 17ти аршинъ, такъ какъ 14 рубл: къ числу рублей, которое должно заплатить за 17 аршинъ, которое пусть будетъ $=Q$, т. е.

$$5 : 17 = 14 : Q, \text{ слѣдовательно} \\ Q = \frac{17 \times 14}{5} = 47\frac{2}{5} \text{ рубл:}$$

Теперь ежели бы кто хотѣлъ вѣдать, сколько $\frac{2}{3}$ частей рубля составляютъ копеекъ; то понеже рубль состоитъ изъ ста копеекъ, сію дробь по § 145 должно превратить въ такую, въ которой бы знаменатель былъ 100, и для того должно поступать слѣдующимъ образомъ:

$$5 : 3 = 100 : q, \text{ и будетъ } q = \frac{300}{5} = 60 \text{ коп:}$$

149) Подобнымъ образомъ рѣшатся вопросы, ежели дана будетъ цѣна и количество товару какого нибудь, сколько тако- гожъ товару на известное число денегъ имѣть можно. На примѣръ за 16 рубл: можно имѣть 6 аршинъ съ половиною известнаго сукна; спрашивается, сколько аршинъ за 40 рубл: тогожъ сукна имѣть можно? Пусть будетъ искомое число аршинъ $=Q$, то будетъ.

$$16 : 40 = 6 \frac{1}{2} : Q \text{ следовательно,}$$

$$Q = \frac{40 \times 6 \frac{1}{2}}{16} = 16 \frac{1}{2}$$

150) Арифметики раздѣляютъ правило тройное на *прямое* [Directa] и *превращенное* или *возвратное* [Inversa]. Правило тройное прямое называется, когда произведение второго и третьего терминъ дѣлится на первый, и находится искомое число. А правило тройное возвратное, когда произведение первого на третий дѣлится на второй. Теперь спрашивается, гдѣ должно употреблять правило тройное прямое, и гдѣ тройное возвратное? Правило тройное возвратное въ тѣхъ случаяхъ употреблять надлежитъ, въ которыхъ требуется, чтобъ въ сколько разъ первой терминъ больше второго, въ столько разъ третьей былъ меньше четвертого: или, чтобъ въ столько разъ третьей былъ больше четвертого, въ сколько разъ первой меньше второго. На примѣръ: 5 человекъ нѣкоторую сумму денегъ издерживаютъ въ 8 дней; спрашивается, въ сколько дней издержатъ ту же сумму 12 человекъ. Изъ сего вопросу видно, что сколько разъ первой терминъ (5) меньше второго (12), столько разъ третьей (8) долженъ быть больше четвертого искомого, потому что чѣмъ меньше людей, тѣмъ больше требуется времени на издержаніе

изысканіе той же суммы денегъ , и найдется искомое число $\equiv 3\frac{1}{3}$. Изъ сего можно разумѣть , когда должно употреблять правило тройное прямое. Короче сказать , во всѣхъ задачахъ должно употреблять правило тройное возвращное , когда при задачѣ сей вопросъ можно употребить : *Чѣмъ больше , тѣмъ меньше* , или *чѣмъ меньше , тѣмъ больше*. Напротивъ того правило тройное прямое , гдѣ можно спросить : *Чѣмъ больше , тѣмъ больше* , или *чѣмъ меньше , тѣмъ меньше*.

Примѣръ.

Ежели бы кто бо верстѣ переходилъ въ 26 часовъ , спрашивается , во сколько времени тотъ же человекъ перейдетъ 265 верстѣ ? Понеже чѣмъ больше разстояние , тѣмъ больше требуется времени , чтобъ оно прейти и обратно ; то изъ сего видно , что при рѣшеніи сего вопроса должно употребить правило тройное прямое , и найдется искомое число часовъ $\equiv \frac{26 \times 6}{6} = 75\frac{1}{2}$.

2 примѣръ) Нѣкоторое строеніе 1000 работниками могутъ построить въ 12 дней , спрашивается , въ сколько дней могутъ построить тѣ же строеніе 325 работниковъ ? Понеже чѣмъ больше работниковъ , тѣмъ меньше требуется времени къ постройкѣ строенія ;

строения ; слѣдовательно въ семъ случаѣ должно будетъ употребить правило тройное возвратное , и будетъ число дней , въ которое 325 рабѣтниковъ совершить могутъ такоежъ строеніе $\frac{12 \times 10 \times 5}{325} = 36\frac{12}{13}$ дней. Та-
кимъ образомъ всѣ задачи , касающіяся до сего правила , разпознавать и рѣшить можно.

151) Когда въ задачѣ данныхъ тер-
миновъ будетъ пять , тогда способъ рѣше-
нія такой задачи называется правиломъ *пяти-
термное* [de cinque] : когда будетъ семь дан-
ныхъ терминовъ , то называется *семерное*
[de septem]. Вообще , сколько бы терминовъ
ки было , называется правиломъ *тройное слож-
ное* , потому что задачи , касающіяся до пра-
вила пятитермного рѣшаются по двумъ тройнымъ ,
касающіяся до семерного , по тремъ тройнымъ .
Сии правила называются *прямыми* , когда
въ нихъ ни одного правила тройного превра-
щеннаго употреблять не надобно : въ про-
тивномъ случаѣ *обратными*. Ежели бы данъ
былъ слѣдующей вопросъ 330 рублей въ 15
мѣсяцевъ приносятъ росту 24 рубли , спра-
шивается , сколько принесутъ 500 рублей
въ 35 мѣсяцевъ ? Пустьъ будетъ искомой
ростъ $= Q$, и ростъ , которой 500 руб-
лей приносятъ въ 15 мѣсяцевъ $= q$. Понеже
чѣмъ больше сумма будетъ , тѣмъ больше
росту будетъ отъ той же суммы денегъ ;
то

то и в сего видно, что сей вопросъ надлежитъ
до правила пятернаго прямого.

$$330 : 500 = 24 : q = \frac{24 \times 500}{15} = 36 \frac{4}{11}.$$

$$15 : 35 = q : Q = \frac{q \times 35}{15} = 84 \frac{28}{11}.$$

Изъ сего также видно, что содержаніе росту
даннаго къ искомому Q сложено изъ содержа-
ній данныхъ суммъ и времени, и будетъ

$$330 \times 15 : 500 \times 35 = 24 : Q = \frac{24 \times 15 \times 500}{330 \times 35} = 84 \frac{28}{11}.$$

152) Надлежитъ примѣръ дать и
правила пятернаго возвращающаго, какъ
есть слѣдующей. Десять человѣкъ 4 рубли
издерживаютъ въ 3 дни, спрашивается, въ
сколько дней 100 человѣкъ издержатъ 2000
рублей? Пусть будетъ время искомое $= T$;
а время, въ которое 100 человѣкъ издер-
жатъ 4 рубли $= t$. Понеже чѣмъ больше
людей, тѣмъ меньше требуется времени на
издержаніе той же суммы денегъ, то въ
посыакѣ

$$10 : 100 = 3 : t, \text{ будетъ } t = \frac{30}{100}.$$

Когда найдено, во сколько времени
100 человѣкъ могутъ издержать 4 рубли;
то по тройному правилу прямому найдется
время, въ которое тожъ число людей издер-
жатъ 2000 рублей. Понеже чѣмъ больше де-
негъ, тѣмъ больше требуется времени на

издержанте ; то изъ сего видно , что здѣсь должно употребить правило тройно прямое.

$$4 : 2000 = t : T = \frac{1 \times 1000}{4} = 150.$$

или поставя термины первой пропорции въ такой порядокъ , чтобъ можно было употребить правило тройное прямое

$$100 : 10 = 3 : t$$

$$4 : 2000 = t : T$$

$$4 \times 100 : 10 \times 2000 = 3 : T$$

$$\text{будетъ } T = \frac{3 \times 100 \times 2000}{4 \times 100} = 150.$$

153) Не можно здѣсь не упомянуть ; что всѣ правила пятерныя обратныя могутъ рѣшены быть по двумъ тройнымъ прямымъ. Возмемъ въ примѣръ прежней вопросъ. Пусть будетъ число денегъ , которое 100 человекъ издерживаютъ въ три дни = а ; то будетъ

$$10 : 100 = 4 : n = 40$$

$$n : 2000 = 3 : T = 150 \text{ или}$$

$$100 : 100 \times 2000 = 3 \times 4 : nT \text{ будетъ}$$

$$T = \frac{3 \times 4 \times 2000}{100 \times 4} = 150.$$

154) Подобнымъ образомъ рѣшаются задачи , состоящія изъ семи и больше термиче. Нпримѣръ 4 писца переписываютъ въ 6 дней 250 страницъ , изъ которыхъ на всякой приходится по 20 строкъ ; спрашивается , во сколько дней 6 писарей 350 страницъ о 25 строкахъ напишутъ ?

Изъ

Изъ самаго вопросу видно , что при рѣшеніи онаго должно разв употребить правило тройное превращенное ; однакожъ здѣсь поставлены терминъ въ такомъ порядкѣ , чтобъ можно было употребить правило тройное прямое.

$$\begin{aligned} 6 &: 4 = 8 : t \\ 250:350 &= t:u \\ 20 \quad 25 &= u:T, \text{ и будетъ} \\ T &= \frac{4 \times 150 \times 25}{6 \times 250 \times 20} = 9\frac{1}{2} \end{aligned}$$

t означаетъ время , въ которое 6 писарей перепишутъ 250 страницъ ; u показываетъ время , въ которое тожъ число писарей перепишутъ 350 страницъ , а T время искомое.

155) Пусть данъ будетъ еще слѣдующей вопросъ: 3300 рублей въ 18 мѣсяцовъ приносятъ росту 180 рублей , а сумма 5000 дана на такой же ростъ на 30 мѣсяцовъ ; но по прошествіи сего времени должникъ , когда займодавцу ростъ платить станетъ по договору , вмѣсто 5 рублей давать долженъ только 4 рубли. Полученной такимъ образомъ ростъ должно раздѣлить между братомъ и сестрою такъ , чтобъ изъ трехъ частей брату досталось двѣ , а сестрѣ одна ; спрашивается , сколько брату и сколько сестрѣ достанется ?

$$3300 : 5000 = 180 : m$$

$$18 : 30 = m : n$$

$$5 : 4 = n : p$$

$$3 : 2 = p : q$$

Здѣсь m значитъ ростъ 5000 рублей въ 18 мѣсяцовъ, n ростъ той же суммы въ 30 мѣсяцовъ, p означаетъ ростъ уменьшенной по договору, а q означаетъ часть, которую братъ изъ росту p получить долженъ, и будетъ.

$$3300 \times 18 \times 5 : 5000 \times 30 \times 4 \times 2 = 180 : q \text{ и}$$

$$q = \frac{500 \times 18 \times 5 \times 2}{3300 \times 30 \times 4} = 242\frac{1}{11}.$$

156) Сюда принадлежитъ и правило товарищества, которое состоитъ въ томъ, чтобъ общему прибытокъ или убытокъ товарищей раздѣлить между ими пропорціонально положеннымъ въ торгъ отъ ихъ суммъ. Понеже кто больше денегъ положилъ, тотъ больше и прибыли, въ разсужденіи другого, имѣть долженъ, и тѣмъ большей терпѣть убытокъ, въ случаѣ проигрышу. И для того будетъ, какъ общая сумма къ общему прибытку или убытку, такъ сумма всякаго изъ нихъ къ своему прибытку или убытку. Пусть данъ будетъ слѣдующей вопросъ: Трое сложились торговать вмѣстѣ, первой изъ нихъ въ торгъ положилъ 1400 рубл.: второй 1500 рубл.: третей 1600 рублей. По прошествіи нѣкотораго времени при-

припорговали они 5000 рублей; спрашивается, сколько всякому изъ сей суммы имѣть должно? Для рѣшенія сего вопроса поступай какъ слѣдуетъ:

Сумма перваго	1400
Второго	1500
Третьяго	1600
Сумма всѣхъ	<u>4500</u>

Пусть будетъ барышъ, которой изъ припоргованной суммы первой получитъ должекъ $=P$, барышъ второго $=Q$, барышъ третьяго $=R$.

$$\begin{aligned} 4500 : 1400 &= 5000 : P \\ 4500 : 1500 &= 5000 : Q \\ 4500 : 1600 &= 5000 : R \end{aligned}$$

будетъ $P=1555\frac{25}{45}$, $Q=1666\frac{20}{45}$, $R=1777\frac{35}{45}$.

Повѣреніе.

$$\begin{array}{r} 1555\frac{25}{45} \\ 1666\frac{20}{45} \\ 1777\frac{35}{45} \\ \hline \end{array}$$

5000 общая прибыль.

157) Если (при суммѣ всякаго дано будетъ еще время, на которое сумма въ торгъ положена, какъ напримѣръ: трое барыша получили 9000 рублей, первой въ торгъ положилъ 1000 рублей на 16 мѣсяцовъ, второй 1400 на 10 мѣсяцовъ, третей 3000 на 7 мѣсяцовъ; спрашивается, сколько всякому изъ общаго барыша получить должно?

то для рѣшенія сего вопроса надлежитъ всякаго сумму умножить временемъ , на которое положена въ торгъ , и произведенія сложить въ одну сумму , и поступать какъ слѣдуетъ :

$$\begin{array}{rcl} 16000 & : & P \text{ барышъ перваго} \\ 51000 : 14000 = 9000 & : & Q \text{ втораго} \\ 21000 & : & R \text{ третьяго} \\ \text{и найдется } P = 2823\frac{7}{11}, Q = 2470\frac{30}{11}, R = 3705\frac{4}{11}. \end{array}$$

Повѣренте дѣлается такимъ же образомъ , какъ прежде.

158) Древнѣе писатели Арифметики имѣютъ еще правило *смѣшенія* , о которомъ я я предложитъ здѣсь намѣренъ. Сие правило показываетъ , какъ данныя вещи разныхъ цѣнъ между собою смѣшивашь , чтобъ смѣшенное имѣло данную цѣну. Напримѣръ , пусть дано будетъ два сорта серебра А и В , изъ которыхъ одного А фунтъ стоитъ 10 рублей , а другого В фунтъ 16 рублей ; спрашивается , сколько должно взять изъ А и В , чтобъ смѣшеннаго С было 5 фунтовъ , изъ которыхъ всякой стоилъ бы 12 рублей ? Здѣсь данныя цѣны суть 10 и 16 , а средняя по произволению взятая 12 , которая ни больше ни меньше не можетъ быть обѣихъ данныхъ. Можетъ въ задачѣ случиться и большее число вещей къ смѣшенію данныхъ , но сперва положимъ , что только

только двѣ дано, въ такомъ случаѣ рѣшатся подобныя задачи слѣдующимъ образомъ. Надлежитъ цѣны подписать одну подъ другою, а среднюю по произволению взятую по срединѣ ихъ отъ лѣвой руки, потомъ надлежитъ данные цѣны съ среднею сравнивать, и сыскавъ между ими разности. Найденную разность между среднею цѣною и большею данныхъ напиши противъ меньшей цѣны, а разность между данною меньшею и среднею цѣною противъ данной большей. Когда сіе здѣлано будетъ, надлежитъ столько раздѣлать правило тройное, сколько дано будетъ вещей или цѣнъ, въ которомъ первой терминъ долженъ быть сумма разностей, второй количество смѣшеннаго, третьей каждая разность. Найденныя количества покажутъ, сколько изъ всякаго сорту взять надлежитъ.

$$A \quad 10 \quad (B-C) \quad 4$$

$$C \quad 12$$

$$B \quad 16 \quad (C-A) \quad 2$$

$$\text{Сумма разностей будетъ} = 6 = B - A$$

$$6:5 = 4:3\frac{1}{3} \text{ ф: столько должно взять сер: } A$$

$$2:1\frac{1}{2} \text{ ф: и столько серебра } B.$$

Смѣшеннаго каждой фунтъ будетъ стоить 12 рублей.

159) Когда дано будетъ больше вещей къ смѣшенію, нежели двѣ, тогда по

3 5

двѣ

дѣѣ всѣ цѣны надлежитъ сравнивать , какъ выше показано , наблюдая 1) чтобъ цѣны , которые сравниваются , не были всѣ ни больше , ни меньше средней. 2) чтобъ разность между большею сравниваемыхъ и среднею цѣною написана была противъ меньшей , а разность между меньшею и среднею противъ большей. Впрочемъ порядокъ , какъ цѣны сравниваются , разности не дѣлаетъ , и можетъ одна и тажъ цѣна съ другими сравниваема быть не однократно. Отъ чего бываетъ , что задача можетъ разными образами разрѣшена быть. Когда всѣхъ цѣнъ сравненія будутъ дѣланы , то сколько разъ правило тройное дѣлать должно , сколько данныхъ цѣнъ имѣется. Въ тройныхъ правилахъ первой терминъ долженъ быть сумма всѣхъ разностей , второй количество смѣшеннаго , третьей всякая разность порознь , или сумма разностей , ежели противъ одной цѣны будетъ больше , нежели одна разность написана. Напримѣръ , пусть дано смѣшать четыре сорта вина А , В , С , D , изъ которыхъ перваго А известная мѣра продается по 30 коп : втораго В , такаяжъ мѣра по 50 коп : третьяго мѣра С по 70 коп : четвертаго D по 85 коп : спрашивается , сколько изъ всякаго взять надлежитъ , чтобъ такаяжъ мѣра смѣшеннаго Е стоила 60 коп :

E 60	A	30	(AC)	10
	B	50	(BD)	25
	C	70	(AC)	30
	D	85	(BD)	10
				сумма 75

$$75:1 = \begin{cases} 10: \frac{2}{15} & \text{столько вина A взять должно} \\ 25: \frac{1}{3} & \text{столько B} \\ 30: \frac{2}{3} & \text{столько C} \\ 10: \frac{2}{15} & \text{столько D.} \end{cases}$$

160) Хотя задача такимъ образомъ и рѣшена ; однакожъ можетъ рѣшиться и слѣдующимъ образомъ , ежели другія сравненія въ разсужденіе примутся.

(C) 60	(A)	30	(AC)	10	(AD)	25
	(B)	50	(BD)	25	(BC)	10
	(C)	70	(AC)	30	(BC)	10
	(D)	85	(BD)	10	(AD)	30

И такъ сумма всѣхъ разностей будетъ = 150

$$150:1 = \begin{cases} 35: \frac{35}{75} = \frac{7}{3} & \text{столько вина A взять дол:} \\ 35: \frac{35}{150} = \frac{7}{3} & \text{столько B.} \\ 40: \frac{40}{150} = \frac{4}{15} & \text{столько C.} \\ 40: \frac{40}{150} = \frac{4}{15} & \text{столько D.} \end{cases}$$

161) Доказательство сего правила и причину , для чего не одно рѣшеніе быть можетъ , когда дано бываетъ больше , нежели двѣ вещи къ смѣшенію , заимствовать должно отъ Алгебры. Теперь еще осталось
вкрат-

вкратцѣ предложить о правилѣ фальшивомъ , въ которомъ по изобрѣщеніи Алгебры почти никакой нужды не имѣемъ , но больше для того , чтобъ показать , съ какою трудностію древніе то находили , что нынѣ помощію Алгебры въ мгновение ока находится.

162) *Правило фальшивое* [*Regula falsi*] называется способъ , изъ ложныхъ положеній находить искомое , и раздѣляется на правило одного положенія и двухъ положеній. Правило одного положенія называется , когда помощію одного по произволению взятаго числа находится искомое , о которомъ я здѣсь говорить не намѣренъ , потому что , ежели показано будетъ , въ чемъ состоитъ правило двойнаго положенія , то первое само собою будетъ ясно. При томъ всѣ вопросы , которые рѣшаются чрезъ первое правило , рѣшены быть могутъ и помощію втораго , но не обратно. Способъ рѣшить задачи состоитъ въ слѣдующемъ : вмѣсто искомаго числа возьми какое нибудь по произволению , которое называется *положеніе* [*Hypothesis*] , и съ нимъ такъ поступай , какъ задача требуетъ. Ежели принятое по произволению число задачи не рѣшитъ , то погрѣшность подписать надлежитъ подъ своимъ положеніемъ. Потомъ возьми другое какое нибудь число , и съ нимъ дѣлай тожъ , что съ первымъ , или какъ задача велитъ. Ежели и другое

и другое съ задачею не сходно будетъ , то погрѣшность подпиши подѣ соответствующимъ положеніемъ. Погрѣшности въ избыткѣ означать надлежитъ знакомъ $+$, а погрѣшности въ недостаткѣ знакомъ $-$. Ежели погрѣшности будутъ одинаки , то разность ихъ , а ежели разные , то сумму ихъ взять за первой терминъ слѣдующаго тройнаго правила. Какъ разность или сумма погрѣшностей къ разности положеній , такъ погрѣшность , которая нибудь къ четвертому пропорциональному. Найденное четвертое пропорциональное число къ тому положенію , отъ котораго произошла погрѣшность на третьемъ мѣстѣ пропорціи поставленная , придать надлежитъ , ежели погрѣшность была въ недостатокъ , вычестъ ежели погрѣшность была въ избыткѣ. Для изъясненія сего правила предлагаются слѣдующіе примѣры :

п р и м ѣ р ы .

163) Лепѣло стадо гусей , а на встрѣчу имъ одинъ гусь , и говоришь : увеличивайте сто гусей , на чѣло одинъ изъ стада отвѣктировалъ : ежели бы насъ было еще столько , сколько шеней имѣется , да полстолька , да четверть столька , да ты гусь съ нами , тогда бы насъ было сто гусей. Спрашивается , сколько гусей лепѣло ?

рѣша-

рѣшеніе.

Пусть числомъ было гусей 4; которое число называется положеніе. Для краткости положеніе должно быть малое число, напр: 1 или 2. Но иногда задача того требуетъ; числомъ положеніе было какое нибудь число побольше, которое бы дѣлилось на извѣстныя числа для избѣжанія дробей. Въ семъ примѣрѣ положеніе должно быть такое, которое бы дѣлилось на 2 и на 4, и для того взято 4. По силѣ задачи $4+4+2+1+1$ должны составить 100; но $4+4+2+1+1=12$ меньше; нежели 100; следовательно погрѣшность отъ сего положенія будетъ въ *избытокъ* $= -88$.

Потомъ надлежитъ здѣлать другое положеніе; пусть число гусей было 12. По силѣ задачи $12+12+6+3+1$ должны быть 100; но $12+12+6+3+1=34$. И такъ погрѣшность и отъ второго положенія будетъ въ *недостатокъ* $= -66$. Следовательно по § 162 должно будетъ дѣлать слѣдующее *второе* правило. Какъ разность погрѣшностей $(+2)$ къ ¹² разности

разности положений (8), такъ погрѣшность копіяная нибудь къ четвертому пропорціональному.

$$22 : 8 = \begin{cases} 88 : P \\ 66 : Q \end{cases}$$

и найдется $P=32$; $Q=24$. Понеже погрѣшности были въ недостаткѣ, найденныя числа надлежитъ придасть къ соотвѣствующимъ положеніямъ; и такъ въ спадѣ гусей было 36.

другое рѣшеніе:

Положимъ, что летѣло 8 гусей. По силѣ задачи $8+8+4+2+1$ должно быть 100; но $8+8+4+2+1=23$; следовательно погрѣшность будетъ въ недостаткѣ $= -77$. Положимъ, что число гусей было $= 44$. По силѣ задачи $44+44+22+11+1$ должны состоять 100: но сумма $44+44+22+11+1=122$. Следовательно погрѣшность будетъ въ избыткѣ $= +22$, и должно будетъ дѣлать слѣдующее тройное правило: какъ сумма погрѣшностей къ разности погрѣшностей, такъ погрѣшность, которая нибудь къ четвертому пропорціональному.

$$99 : 36 = \begin{cases} 77 : P \\ 42 : Q \end{cases}$$

и найдется $P=28$, что по § 162 должно придать къ своему положению, чтобъ имѣть искомое число, которое будетъ $=36$, а $Q=8$, которое по § 159 должно вычесть изъ положенія 44, и найдется, какъ прежде, число гусей 36.

п о в ъ р ѣ н і е.

$36+36+18+9+1=100$ Изъ сего явствуемъ, что стадо гусей было 36.

164) рѣшенія, въ которомъ бы объ погрѣшности были въ избыткѣ, не прилагаю, потому что оно со всѣмъ сходно съ первымъ, найденныя только четвертыя пропорціональныя числа надлежитъ вычитать изъ положеній соотвѣствующихъ.

п р и м ѣ р њ 2.

165) Двое имѣютъ неизвѣстное число денегъ, только извѣстно, что ежели первой изъ своихъ другому дастъ 9 рубл: то у обѣихъ будетъ поровну. А ежели второй дастъ первому

вому 9, то первой будетъ имѣть
вдесятеро больше, нежели второй;
спрашивается, сколько всякой имѣетъ
порознь?

рѣшеніе.

Положимъ, что первой имѣетъ
100 рублей, изъ которыхъ ежели
дастъ второму 9; то у него оста-
нется 91, и сумма впрочемъ будетъ
 $= 91 + 9 = 100$. Ежели второй изъ сум-
мы своей 82 первому дастъ 9, то у
самого останется 73, а первой будетъ
имѣть 109, что по силѣ задачи дол-
жно быть вдесятеро больше, нежели
73, то есть 73 на 10 умноженное
должно быть $= 109$. Но 730 превы-
шаетъ 109 числомъ 621; слѣдова-
тельно погрѣшность въ избытокъ
 $= +621$. Положимъ теперь, что пер-
вой имѣетъ 101, и найдетъся погрѣш-
ность также въ избытокъ $= +630$. Сле-
довательно должно будетъ по § 162
дѣлать слѣдующее тройное правило.
Какъ разность погрѣшностей къ раз-
ности положений, такъ погрѣшность
которая нибудь къ четвертому про-
порціональному.

$$9:1 = \begin{cases} 621 : P = 69 \\ 630 : Q = 70. \end{cases}$$

Слѣдовательно первой имѣлъ 31 рубль, а второй 13 рублей.

примѣръ 3.

166) Трое выиграли 400 рубл: второй выигралъ больше, нежели первой 12 рублей, а третей выигралъ 16 рублей; больше, нежели второй, спрашивается, сколько всякой изъ нихъ выигралъ?

рѣшеніе.

Положимъ, что первой выигралъ только одинъ рубль, слѣдовательно выигрышъ второго будетъ 13 рублей, третьего 29, и такъ сумма будетъ всѣхъ выигрышей 43, а должно быть 400 рубл: слѣдовательно погрѣшность будетъ въ недостатокъ $= -357$. Положимъ еще, что перваго выигрышъ состоялъ въ 2 рубл: и такъ погрѣшность будетъ опять въ недостатокъ $= -354$. Слѣдовательно по § 162 должно дѣлать слѣдующее тройное правило: какъ озносить погрѣшностей къ

разности положений, такъ погрѣшность которая нибудь къ четвертому пропорціональному.

$$x : y = \begin{cases} 357 : P = 112 \\ 354 : Q = 118. \end{cases}$$

Слѣдовательно выигрышъ перваго будетъ 120 рубл: втораго 132 рубл: третьяго 148 рублей.

167) Подобные задачи рѣшаются также и слѣдующимъ образомъ. Ежели погрѣшности будутъ одинаки, надлежитъ первое положеніе умножить погрѣшностью втораго; и второе положеніе погрѣшностью перваго, разность произведений раздѣлить на разность погрѣшностей, частное число будетъ самое искомое. А ежели погрѣшности будутъ не одинаки; то сумму произведений надлежитъ раздѣлить на сумму погрѣшностей; частное число будетъ искомое.

примѣръ.

168) Трое имѣютъ неизвѣстное число денегъ; первой и второй имѣютъ 120 рубл: второй и третьей 200 рубл: первой и третьей 300 рубл: спрашивается, сколько всякой имѣетъ?

РѢШЕНИЕ.

Положимъ, что первой имѣетъ 10 рубл.: второй будетъ 110, а третей 90 рубл.: и понеже еще первой и третей имѣютъ 300 рубл.: а по положенію сумма перваго и третяго $= 100$, следовательно погрѣшность будетъ $= -200$. Положимъ, что первой имѣетъ 20 рубл.: сумма втораго будетъ 100 рубл.: третяго также 100 рубл.: но первой и третей имѣютъ 300 рубл.: а по положенію только 120, следовательно будетъ погрѣшность $= -180$.

Полож.: I-ое II-ое

$$\begin{array}{r} 10 \quad 20 \\ \times \quad \times \\ 200 \quad 180 \\ \hline 1800 \quad 4000 \end{array}$$

Разность произведений будетъ $= 2200$; разность погрѣшностей $= 20$. Следовательно сумма перваго будетъ $= 110$, втораго $= 10$, третяго $= 190$ рублямъ.

159) Не только всѣ задачи, которыя по тому правилу рѣшены быть могутъ, но и тѣ, кото-

которыхъ по простой Ариѣметикѣ рѣ-
шить не возможно, помощію Алгебры не-
сравненно способнѣе рѣшатся. И для того я
здѣсь ни примѣровъ не умножаю, ни дока-
зательствъ сихъ правилъ не прилагаю.

ГЛАВА ШЕСТАЯ.

о прогрессіяхъ и логариѣмахъ.

ОПРЕДѢЛЕНІЕ 25.

170) *Порядокъ* или *прогрессія* [series или Progressio] есть продолженіе чи-
селъ, въ какомъ нибудь содержаніи на-
ходящихся. *Прогрессія Ариѣметиче-
ская* [Arithmetica] называется, въ копо-
рой разность между двумя ближайши-
ми терминами вездѣ тажъ *Поряд-
окъ* или *прогрессія Геометрическая*
[Geometrica] называется, въ кото-
рой содержаніе каждаго термина къ
своему послѣдующему вездѣ одинако.

Примѣчаніе.

171) По сему безчисленное множе-
ство имѣть можно *порядковъ* или *прогрессій*
какъ *Ариѣметическихъ*, такъ и *Геометри-
ческихъ*.

ческихъ. Изъ опредѣленія видно, что числа натуральныя 1, 2, 3, 4, 5, 6 и проч: составляютъ прогрессию Арифметическую, въ которой всякой терминъ отъ своего предъидущаго разнится единицею. Арифметическую же прогрессию будутъ составлять и слѣдующія числа: 1, 3, 5, 7, 9, 11 и проч: или 1, 4, 7, 10, 13, 16, и проч: изъ которыхъ въ первой разность терминовъ есть 2, а въ другой 3. Геометрическія прогрессіи суть слѣдующія: 1, 2, 4, 8, 16, и проч: и 1, 3, 27, 81, и проч:

Слѣдствіе в.

172) Понеже въ прогрессіи Арифметической разность между каждыми ближайшими двумя терминами есть одинака; то изъ даннаго одного термина прогрессіи и разности можно произвести безконечной рядокъ, вычитая или прибавляя данную разность. Такъ на примѣръ, пусть будетъ данъ терминъ 15, а разность 3. Чрезъ приложеніе разности произойдетъ слѣдующей рядокъ: 15, 18, 21, 24, 27, 30 и проч: а чрезъ вычитаніе данной разности изъ даннаго термина найдетъ слѣдующей рядокъ:

15, 12, 9, 6, 3, 0. — 3 — 6. — 9. и проч или вообще, пусть будетъ данной терминъ M , разность между двумя ближайшими

ми

ми прогрессіи терминами N ; то произойдетъ слѣдующая прогрессія : $M - nN, \dots M - N, M - \frac{1}{2}N, M - N, M, M + N, M + \frac{1}{2}N, M + N, \dots M + nM$ гдѣ за M и N можно взятьъ дробь или ирраціональное какое нибудь число.

Слѣдствіе 2.

17²) Изъ предъидущей прогрессіи видно , что ежели M возьмется за первой терминъ , то $M + N$ будетъ второй , $M + \frac{1}{2}N$ будетъ третей , $M + \frac{1}{4}N$ будетъ четвертой , и разность между первымъ и вторымъ будетъ N , между первымъ и третимъ будетъ $\frac{3}{2}N$ вдвое больше , нежели общая , между первымъ и четвертымъ $2N$, втрое больше общей , и такъ далѣе. По сему изъ данныхъ двухъ терминовъ прогрессіи Арифметической съ числомъ терминовъ , которые между данными находятся должны , можно опредѣлить всю прогрессію. Пусть изъ прогрессіи A, B, C, D, E, F и проч : данъ будетъ терминъ A и другой F ; разность , которую сыскать должно $= N$. Понеже F есть шестой прогрессіи терминъ ; то будетъ $F - A = 5N$, слѣдовательно $N = \frac{F - A}{5}$, которую , ежели придашь къ A найдется B , потомъ C , потомъ D и прочіе , которые между A и F вмѣщены быть должны.

Слѣдствіе 3.

174) Слѣдовательно между данными двумя терминами прогрессіи Арифметической можно вывести столько терминовъ , сколько за благо разсудится , которые составятъ новую прогрессію. Пусть будетъ прежняя прогрессія А, В, С, D и проч: и надлежало бы между А и В одинъ терминъ , которой называется средней пропорціональной Арифметической , пусть будетъ искомымъ терминъ $=X$, по § 173 должно быть $B-A = (X-A)$ или $X = \frac{A+B}{2}$.

Слѣдствіе 4.

175) Понеже въ прогрессіи Геометрической содержаніе всякаго термина къ своему послѣдующему есть одинако ; то изъ даннаго одного термина и содержанія прогрессіи найдутся всѣ послѣдующіе термины. Пусть будетъ данной терминъ 15 , содержаніе прогрессіи 3:4 , второй терминъ будетъ $\frac{4 \times 15}{3} = 20$; третьей $\frac{4 \times 20}{3} = \frac{80}{3}$; четвертой $\frac{3^{20}}{9}$, и такъ далѣе. Подобнымъ образомъ найдутся термины назадъ отступая $\frac{4}{3}$, $\frac{15}{16}$ и проч: или вообще пусть будетъ данной терминъ Р содержаніе прогрессіи m:n , то изъ сихъ данныхъ составить можно слѣдующую прогрессію :

...

... $\frac{m^3 P}{n^3}, \frac{m^2 P}{n^2}, \frac{m P}{n}, P, \frac{n P}{m}, \frac{n^2 P}{m^2}, \frac{n^3 P}{m^3}, \dots$ и пр:
 въ которой въ мѣсто P , m и n можно
 взять по произволѣю какія нибудь числа.

Слѣдствіе 5.

173) Изъ прогрессіи видно, что ежели
 P будетъ первой прогрессіи терминъ, $\frac{n P}{m}$ бу-
 детъ второй, $\frac{n^2 P}{m^2}$ будетъ третьей, $\frac{n^3 P}{m^3}$
 будетъ четвертой. Содержаніе перваго къ
 второму будетъ $m:n$, перваго къ треть-
 ему $mn:nn$ удвоенное содержанія простаго;
 перваго къ четвертому будетъ $m^3:n^3$,
 утроенное содержанія $m:n$; слѣдовательно
 изъ данныхъ двухъ и числа терминовъ,
 между двумя находящихся, можно опредѣ-
 лить прогрессію. Пусть изъ прогрессіи A ,
 B , C , D , E даны будутъ термины первой
 A и четвертой D , то будетъ $A:D = m^3:n^3$,
 и по сему $\sqrt[3]{A}:\sqrt[3]{D} = m:n$. Нашедши содер-
 жаніе двухъ терминовъ ближайшихъ, всѣ
 термины опредѣлить можно будетъ.

Слѣдствіе 6.

174) Слѣдовательно между данными
 двумя терминами прогрессіи Геометрической
 столько можно умѣстить терминовъ, сколько
 и 5 за благо

за благо разсудится. Когда между двумя тер-
минами одинъ только вмѣстить должно, то
сѣ рѣшится по § 138. На примѣрѣ, ежелибы
дана была прогрессія $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, 2, 8, 16$, и между
всякими двумя терминами надлежало бы вмѣ-
стить по одному, то произойдетъ слѣду-
ющая прогрессія.

$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, 1, 2, 4, 8.$

Прибѣчаніе.

178) Сего довольно о прогрессіяхъ для
показанія свойства логариѳмовъ. Въ алгебрѣ
о свойствахъ прогрессій говорено будетъ
въ пространствѣ.

ОПРЕДѢЛЕНІЕ. 26.

179) Ежели подѣ прогрессіею Гео-
митрическою, которая начинается
отъ единицы, подписана будетъ какая
нибудь Ариѳметическая, такъ чіпоу
единицъ соотвѣтствовалоу о; то чі-
сла въ низу подписанныя называются
верхнихъ логариѳмы [Logarithmi]. На-
примѣрѣ пусть прогрессія

Геом: 1 2 4 8 16 32 64 128 и проч:

Ариѳм: 0 1 2 3 4 5 6 7

то логариѳмъ единицы будетъ 0, ло-
гариѳмъ

гариѣмъ числа 4 будетъ 2 , а логариѣмъ 32 будетъ 5.

Примѣчаніе.

180) Понеже обѣ прогрессіи могутъ приняты быть по произволѣнію , и разныя прогрессіи , разныя тѣхъ же чиселъ дадутъ логариѣмы ; слѣдовательно разныя таблицы логариѣмовъ сочинить можно , но во всѣхъ логариѣмъ единицы долженъ быть 0. Напрѣжели бы прогрессія Геометрическая была ;

1 4 16 64 256 и проч :

а Ариѣм : 0 1 2 3 4

то бы тѣхъ же чиселъ , напримѣръ 4 и 16 отмѣнные отъ прежнихъ произошли логариѣмы. Таблицы логариѣмовъ , которые обыкновенно употребляются , основаны на двухъ слѣдующихъ прогрессіяхъ :

Числѣ :	1	10	100	1000	10000
Ариѣмъ :	0,0000000	1,0000000	2,0000000	3,0000000	4,0000000
или	0	1	2	3	4

По сему логариѣмъ 10 будетъ единица , или 1,0000000 ; логариѣмъ 100 будетъ 2,0000000 ; логариѣмъ 1000 будетъ 3,0000000 ; слѣдовательно логариѣмъ столько содержитъ въ себѣ цѣлыхъ единицъ , сколько при числѣ , которое логариѣму соотвѣтствуетъ .

отвѣствуетъ , находится нулей , и логари-
 риомы чиселъ между числами прогрессіи Гео-
 метрической находящихя , изображены дол-
 жны быть десятичными дробями : тѣхъ ,
 которые содержатся между единицею и 10 ,
 будущъ логариомы меньше единицы , а ко-
 торые содержатся между 10 и 100 , должны
 быть меньше нежели 2 , а больше , неже-
 ли единица , а тѣхъ , которые содержатся
 между 100 и 1000 логариомы должны быть
 меньше нежели 3 , а больше нежели 2 ,
 или вообще , въ логариомѣ числа какого ни-
 будь , число цѣлыхъ единицъ должно быть
 меньше единицею , нежели изъ сколько зна-
 ковъ данное число состоитъ . Число цѣлыхъ
 единицъ въ логариомѣ какомъ нибудь назы-
 вается *характеристика* , которая извѣстна ,
 ежели извѣстно будетъ , изъ сколько зна-
 ковъ число состоитъ . И обратно ; ежели
 данъ будетъ какой нибудь логариомъ , то
 по характеристикѣ видно будетъ , изъ сколь-
 ко знаковъ число оному соотвѣствующее
 состоятъ должно .

ПОЛОЖЕНІЕ.

181) Логариомъ какого нибудь
 числа , напримѣръ M означается
 обыкновенно литерою l , и пишется
 слѣдующимъ образомъ : lM .

ТЕОРЕ-

ТЕОРЕМА 8.

182) Если логарифмъ единицы будетъ 0, какъ по пѣхъ системахъ логарифмовъ быть должно; то логарифмъ произведенія двухъ чиселъ будетъ равенъ суммѣ логарифмовъ множимыхъ чиселъ.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Понеже единица содержится къ одному изъ множимыхъ чиселъ такъ, какъ другое множимое къ произведенію, но соотвѣтствующіе числамъ логарифмы должны быть въ прогрессіи Арифметической, то найдется четвертое Арифметическое пропорціональное число; то есть логарифмъ соотвѣтствующей произведенію, ежели къ третьему придастся вторая, и изъ суммы вычтется первая. Но логарифмъ единицы есть 0; слѣдовательно логарифмъ произведенія двухъ чиселъ равенъ суммѣ логарифмовъ имъ соотвѣтствующихъ.

Слѣдствіе 1.

183) Если будутъ даны два числа M и N , и притомъ логарифмы оныхъ, то логарифмъ

рѣнь произведенія $M \times N$ будетъ $\equiv M + N$,
и ежели будетъ $M = N$, то логарифмъ
квадрата MM будетъ $\equiv 2M$, логарифмъ
куба будетъ $\equiv 3N$, и обратно логарифмъ
корня квадратнаго какого нибудь
числа N равенъ будетъ половинѣ логарифма
числа N , логарифмъ корня кубическаго бу-
детъ равенъ третей части логарифма то-
гожъ числа. По сему при извлеченіи корней
логарифмы съ пользою употребляются. Можно.
Вообще логарифмъ числа $M^n \equiv nM$.

Слѣдствіе 2.

184) Ежели числа какого нибудь ло-
гарифмъ имѣется въ цѣлыхъ числахъ; то
тогожъ числа квадрата, куба и прочихъ
степеней логарифмы будутъ цѣлыя числа;
слѣдовательно другихъ чиселъ логарифмы цѣ-
лые быть не могутъ, какъ степеней, то
есть 100, 1000 и прочихъ.

ТЕОРЕМА 9.

185) Логарифмъ частнаго чи-
сла равенъ разности логарифмовъ
дѣлимаго числа и дѣлителя.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Понеже дѣлитель содержится къ
дѣлимому числу такъ, какъ единица къ
числу.

частному ; но логарифмы имъ соотвѣствующіе должны составлять прогрессию Арифметическую , то найдется четвертое пропорциональное Арифметическое , то есть логарифмъ соотвѣствующей частному числу , ежели къ второму термину придастся третій , и изъ суммы вычтется первый. Но логарифмъ единицы есть $= 0$; следовательно логарифмъ частнаго числа будетъ равенъ разности логарифмовъ дѣлимаго числа и дѣлителя.

С л ѳ д с т в і е.

186) Ежели будетъ дѣлимое число M , а дѣлитель N ; то логарифмъ частнаго числа $\frac{M}{N}$ будетъ $= |M| - |N|$, и логарифмъ дроби какойнибудь найдется , ежели изъ логариѳма числителя вычтется логарифмъ знаменателя.

З а д а ч а 18.

187) Числа какогонибудь найти логарифмъ , и показать способъ , какъ находить логарифмы для всѣхъ обыкновенныхъ чиселъ.

рѣше

рѣшеніе.

Надлежитъ , какъ уже выше гово-
рено , взять по произволению двѣ про-
грессіи, одну Геометрическою, а другую
Арифметическую и послѣднюю подѣ перь-
вою подписать. Прогрессіи, которыя при
сочинении таблицъ логарифмовъ обыкно-
денно употребляются, суть слѣдующія:

А) 1,000000; 10,000000; 100,000000; 1000,000000; 10000,
(00000000)

В) 0,000000; 1,000000; 2,000000; 3,000000; 4,
(00000000)

И такъ всѣхъ чиселъ , которыя въ
прогрессіи А находятся , даны будущіе
логарифмы совершенные , а тѣхъ чи-
селъ , которыхъ въ прогрессіи А не на-
ходятся , совершенныхъ логарифмовъ
имѣть не можно. Но чтобъ найти и
другихъ чиселъ логарифмы , хотя не-
совершенные , но столь аккуратные ,
чтобъ безъ погрѣшности употреблять
можно было , надлежитъ въ прогрессіи
Геометрической вмѣщать новые тер-
мины между терминами ближайшими
къ данному , и всякому прогрессіи
Геом : найденному термину искать въ
Арифметической соотвѣствующей ло-
гарифмъ.

гариѣмъ. Пусть дано будетъ сыскать логариѣмъ числа 5. Понеже 5 между 1 ю и 10 ю содержащя, надлежитъ между 1 ю и 10 ю сыскать среднее пропорціо-
нальное, и между ихъ логариѣмами соот-
вѣствующей найденному пропорціо-
нальному числу логариѣмъ. Такимъ обра-
зомъ, найдется среднее пропорціональ-
ное $C=3,162277$, и $IC=0,555555$. По-
неже число 5 стоитъ между C и меж-
ду B, надлежитъ вмѣщать между
B и C какъ прежде терминъ D, которой
будетъ $=5,623413$, и соотвѣствующей
ему логариѣмъ $ID=0,750850$.
Подобныя дѣйствія должно продолжать
до тѣхъ поръ, пока среднее пропорціо-
нальное число не будетъ то самое съ
нѣскольکو нулями, котораго логариѣмъ
пребудетъ. Какъ на примѣръ въ
таблицѣ слѣдующей найдено 5,555555
и его логариѣмъ $=0,698970$. Число
нулей показывающъ, до какихъ частей
логариѣмъ отъ истиннаго нерознится.
Можно ежели дальней аккуратности
не пребудетъ, безъ погрѣшности уже
IV взять за логариѣмъ числа 5.

$A=1,000000$	$IA=0,000000$
$B=10,000000$	$IB=1,000000$
	I

$C=$

$C = 3,162277$	$IC = 0,5000000$	$C = \sqrt{AB}$
$D = 5,623413$	$ID = 0,7500000$	$D = \sqrt{BC}$
$E = 4,216964$	$IE = 0,6250000$	$E = \sqrt{CD}$
$F = 4,869674$	$IF = 0,6875000$	$F = \sqrt{DE}$
$G = 5,232991$	$IG = 0,7187500$	$G = \sqrt{EF}$
$H = 5,048065$	$IH = 0,7031250$	$H = \sqrt{FG}$
$I = 4,958069$	$II = 0,6953125$	$I = \sqrt{GH}$
$K = 5,002865$	$IK = 0,6992187$	$K = \sqrt{HI}$
$L = 4,980416$	$IL = 0,6972656$	$L = \sqrt{IK}$
$M = 4,991627$	$IM = 0,6982421$	$M = \sqrt{KL}$
$N = 4,997242$	$IN = 0,6987304$	$N = \sqrt{KM}$
$O = 5,000052$	$IO = 0,6989745$	$O = \sqrt{KN}$
$P = 4,998647$	$IP = 0,6988525$	$P = \sqrt{NO}$
$Q = 4,999350$	$IQ = 0,6986135$	$Q = \sqrt{OP}$
$R = 4,999701$	$IR = 0,6989440$	$R = \sqrt{QQ^{96}}$
$S = 4,999876$	$IS = 0,6989592$	$S = \sqrt{QR}$
$T = 4,999963$	$IT = 0,6989668$	$T = \sqrt{QS^A}$
$V = 5,000008$	$IV = 0,6989707$	$V = \sqrt{OTS}$
$W = 4,999984$	$IW = 0,6989687$	$W = \sqrt{TV}$
$X = 4,999997$	$IX = 0,6989697$	$X = \sqrt{WV}$
$Y = 5,000003$	$IY = 0,6989702$	$Y = \sqrt{XY^{10}}$
$Z = 5,000000$	$IZ = 0,6989700$	$Z = \sqrt{XY}$

Примѣ-

Примѣчаніе.

188) Такимъ образомъ исканы логариѣмы чиселъ ; однакожъ не всѣхъ чиселъ шоль продолжительнымъ трудомъ логариѣмы нахожены. Ежели всѣхъ чиселъ отъ единицы даже до десяти логариѣмы будутъ извѣстны , то всѣхъ чиселъ , которыя изъ оныхъ чрезъ умноженіе , дѣленіе и извлеченіе корней производятъ , логариѣмы легко найти можно. На примѣръ , ежели бы надлежало сыскать логариѣмъ числа 18 , тобъ изъ данныхъ логариѣмовъ чиселъ 9 и 2 , или понеже $19 = 313$ изъ логариѣмовъ чиселъ 3 и 2 найденъ былъ $118 = 313 + 12$. Есть и другія сокращенія , о которыхъ говорено будетъ въ своемъ мѣстѣ.

189) Понеже всякаго числа логариѣмъ состоитъ изъ цѣлаго числа и десятичной дроби , которая называется *Мантисса* , и цѣлое число показываетъ число знаковъ , то мантисса будетъ показывать , какіе оныя знаки быть должны : и ежели по мантиссѣ найдено будетъ число , которое логариѣму соотвѣтствуетъ , характеристика покажетъ , сколько знаковъ въ найденномъ числѣ будетъ принадлежать къ цѣлымъ числамъ , и которыя будутъ означать десятичныя дроби. Такъ ежели бы найденъ былъ логариѣмъ слѣдующей 2,7603471 , мантисса покажетъ , что число сему логариѣму соотвѣтствующее

щее будетъ 4759 . Но характеристика означаетъ , что число должно состоять изъ трехъ только знаковъ ; слѣдовательно соотвѣствующее число сему логариѳму будетъ $575,9$. Ежели бы характеристика была 0 , то бы соотвѣствующее число было $5,759$. А ежели бы характеристика была -1 , то бы число сему логариѳму соотвѣствующее было $0,5759$. Тажъ манписса съ характеристикой -2 соотвѣтствовать будетъ числу $0,05759$. Въ такихъ случаяхъ должно разумѣть , что знакъ $-$ принадлежишь только къ характеристикѣ , а не къ десятичной дроби , какъ будто бы написано было $-2 + 0,7603471$.

190) Напротивъ того , когда дано будетъ число 7942 , найдется логариѳмъ онаго $3,8999299$; а ежели бы данное число было $794,2$, то бы логариѳмъ онаго былъ $2,8999299$. Равнымъ образомъ логариѳмъ числа $7,942$ будетъ $0,8999299$. Изъ сего видѣть можно , какъ находить логариѳмы чиселъ , при которыхъ десятичныя дроби находятся. Надлежитъ представить , будто бы всѣ знаки даннаго числа означали цѣлыя части, потомъ взявши изъ таблицъ соотвѣствующей имъ логариѳмъ , характеристику надлежитъ переменить какъ свойство логариѳмовъ пребудетъ (§ 180). А ежели надобно будетъ сыскать логариѳмъ такого числа , которое состоишь изъ цѣлаго числа и изъ дроби , то данное

данное число должно обратить въ дробь больше единицы, сыскать логарифмы числителя и знаменателя порознь, и послѣдней вычесть изъ перваго (§ 186) такъ напримѣръ $13\frac{3}{4}$ будетъ $= 1\frac{13}{4} = 15 - 14 = 0.5740313$.

191) Что говорено въ § 189, тогда только можеть имѣть мѣсто, когда въ таблицахъ находится самая данная мантисса. И понеже обыкновенныя таблицы логарифмовъ не простираются далѣе какъ до 10000, то предписанное въ § 190 правило, тогда только безъ погрѣшности употреблять можно, когда въ данномъ числѣ не болѣе будетъ какъ чепыре знака. Какъ поступать должно въ другихъ случаяхъ, ниже сего слѣдуетъ.

ЗАДАЧА 19.

192) Данному логариѣму, котораго въ таблицахъ не находится, найти соотвѣтствующее число.

РѢШЕНІЕ.

1) Ежели характеристика данна-
го логариѣма буденѣ о , или 1 , или
2 ; то перемѣня характеристику на
3 , а манниѣсу оспавя пужѣ , надле-
житѣ въ таблицахъ сыскать число со-
отвѣтствующее сему логариѣму , или
I 3 пому

тому, которой ближе подходитъ къ данному. Въ найденномъ числѣ столько ошдблѣть должно знаковъ для десятичныхъ дробей, сколько къ характеристикѣ прибавлено будетъ единицъ. Пусть данной логариѣмъ будетъ 1,9446784 соотвѣтствующее число логариѣму, которой болѣе всѣхъ прочихъ сходенъ съ даннымъ, будетъ 88. Но сего числа настоящей логариѣмъ есть 1,9444827, и для того характеристику перемѣня на 3, ищи соотвѣтствующее число логариѣму 3,9446784; слѣдовательно данному логариѣму соотвѣтствующее аккуратнѣйшее число будетъ 88,04.

II) Если характеристика даннаго логариѣма будетъ 2 или 3 то взявши изъ таблицъ логариѣмъ меньшей ближайшій данному, надлежитъ оной вычесть изъ большаго ближайшаго къ данному, и изъ самаго даннаго; попомъ дѣлать слѣдующее тройное правило, какъ первая разность къ 100, или къ 1000, или къ 10000, такъ вторая къ искомымъ десятымъ, сотеннымъ, тысячнымъ, десятитысячнымъ частямъ, найденныя части должно приписать къ

1

числу,

числу, которое соотвѣпствуеиъ логариѣму меньшему, ближайшему къ данному. Такимъ образомъ найдено будетъ аккуратнѣе соотвѣпствующее число. Напримѣръ, пусть данной логариѣмъ будетъ 3,4567809, къ которому меньшей ближайшей будетъ 3,4566696, а соотвѣпствующее ему число 2862; слѣдовательно разность между ими будетъ 1113; большей ближайшей къ данному будетъ 3,4568213; и разность между имъ и 3,4566696 будетъ 1517, откуда

$$1517 : 100 = 1113 : Q = 73$$

Слѣдовательно данному логариѣму аккуратнѣйшее прежняго соотвѣпствующее будетъ число 2862,73. Ежели бы на второмъ мѣстѣ поставлено было 1000, то бы искомое число нашлось 2862,733.

Примѣчаніе

193) Ежели логариѣмъ данъ будетъ больше, нежели какіе въ таблицахъ находяпся, и ему должно найти соотвѣпствующее число, то надлежитъ сперва сыскать соотвѣпствующее число смотря на мантиссу. По-

шбмъ по характеристикѣ надлежитъ опредѣ-
лить въ найденномъ числѣ мѣсто единицъ.
Ежели бы на примѣрѣ данъ былъ слѣдующей
логариѣмъ 6,7589962; сыщи напередъ число
соотвѣтствующее сему логариѣму смотря на
манписсу, которое будетъ 5741. Но харак-
теристика показываетъ, что число должно
состоять изъ семи знаковъ, то когда аккурат-
ности не требуется, вмѣсто искомага числа
можно взять 5741000. Въ противномъ случаѣ
надлежитъ по § 192 манписсѣ искать аккурат-
нѣйшее число, и по характеристикѣ озна-
чить мѣсто единицъ. Такимъ образомъ най-
дется сему логариѣму соотвѣтствующее
число 5741413.

ЗАДАЧА 20.

194) Данному числу, которое
превосходитъ 10000, найти соот-
вѣтствующей логариѣмъ.

РѢШЕНІЕ.

Сыщи въ таблицахъ логариѣмъ, ко-
торый соотвѣтствуетъ первымъ спѣ-
лѣвой руки чепыремъ знакамъ данаго
числа, и вычи очой изъ большаго бли-
жайшаго, попомъ дѣлай тройное пра-
вило, въ которомъ первой переминъ
долженъ быть единица со столько ну-
лями,

лями, сколько остальных знаков въ числѣ находится, второй пріемъ даннаго числа знаки, пріемъ найденная разность. Найденное четвертое пропорциональное число придай къ мантиссѣ логарифма изъ таблицъ взятаго, и характеристику переѣмни глядя по числу знаков, и произойдетъ искомый логарифмъ. Пусть будетъ данное число 5423758: логарифмъ числа 5423 будетъ 3.7342396, разность 801, и по немъ въ данномъ числѣ остается еще три знака, то должно посылать.

$$1000 : 758 = 801 : Q = 607$$

Слѣдовательно логарифмъ искомаго числа будетъ 6,7343003.

ЗАДАЧА 21.

195) Даннымъ тремъ числамъ по мощи логарифмовъ найти четвертое пропорциональное.

РѢШЕНІЕ.

Пусть будутъ данныя числа А, В, С, а четвертое пропорциональное D; то будетъ $D = \frac{B \times C}{A}$, но $1D = 1B + 1C - 1A$
15 слѣдо-

слѣдовательно четвертаго пропорциональнаго числа логариѣмъ найдется, ежели къ логариѣму прѣпьяго приданъ будетъ логариѣмъ втораго, и изъ суммы вычѣтся логариѣмъ перваго, а попомъ по таблицахъ соотвѣтствующее ему искомое четвертое пропорциональное. Пусть будетъ $A=13$, $B=204$, $C=615$,

$$\begin{aligned} 1A &= 1.1139433 \\ 1B &= 2.3096302 \\ 1C &= 2.7888751 \\ \hline 1B+1C &= 5.0985053 \\ 1B+1C-1A &= 3.9845620 = 1D, \end{aligned}$$

которому надлежитъ въ таблицахъ сыскать соотвѣтствующее число, оное будетъ $9650,7=D$. Пусть будетъ $A=1,3$; $B=20,4$; $C=0,615$.

$$\begin{aligned} 1A &= 0.1139433 \\ 1B &= 1.3096302 \\ 1C &= -1.7888751 \\ \hline 1B+1C &= -0.4792449 \\ 1B+1C-1A &= -0.5931882 = 1D, \end{aligned}$$

которому соотвѣтствующее число будетъ $9,6507=D$.

Прикѣ-

Прибѣчаніе.

106) Хотя употребленіе логарифмовъ довольно видно будетъ изъ тригонометріи, однакожъ здѣсь присовокуплю примѣръ, изъ котораго бы видно было, что и въ общемъ жишій бывають случаи, гдѣ логарифмы съ великою пользою употреблены быть могутъ. Ежели изъ банка состоящаго изъ 300000 рублей отдаваны будутъ деньги въ проценты, такъ чтобъ по прошествіи каждаго года, каждые сто рублей приносили росту 6 рублей, спрашивается, сколько будетъ въ банкѣ денегъ спустя десять лѣтъ. Для рѣшенія сей задачи пусть будетъ искомая сумма = S. Понеже 100 рублей росту въ годъ приносятъ 6 рублей, то 300000 рублей принесутъ $\frac{6 \times 300000}{100}$; и такъ по прошествіи одного году въ банкѣ будетъ $300000 + \frac{6 \times 300000}{100} = (1 + \frac{6}{100}) \times 300000 = (\frac{106}{100}) \times 300000$. По прошествіи двухъ лѣтъ въ банкѣ будетъ находится $\frac{106}{100} \times (\frac{106}{100}) \times 300000 + \frac{106 \times 6}{(100)^2} \times 300000 = (\frac{106}{100} + \frac{106 \times 6}{(100)^2}) \times 300000 = (\frac{106}{100})^2 \times 300000$. Подобнымъ образомъ найдемся, что по прошествіи трехъ лѣтъ банковая сумма будетъ $(\frac{106}{100})^3 \times 300000$; по прошествіи четырехъ лѣтъ будетъ $(\frac{106}{100})^4 \times 300000$, и такъ далѣе: слѣдовательно по прошествіи десяти лѣтъ въ банкѣ будетъ $(\frac{106}{100})^{10} \times 300000 = S$. Но кто бы хотѣлъ дробь $\frac{106}{100}$ возвышать до десятой степени? и для того въ семъ случаѣ

случаѣ съ пользою можно употребить логариѣмы, какъ слѣдуетъ. Возьми изображенія

$$\left(\frac{126}{125}\right)^{10} \times 300000 = S$$

логариѣмы, и будетъ $10 \log \frac{126}{125} + \log 300000 = \log S$

$$\text{или } 10 \log 126 - 10 \log 125 + \log 300000 = \log S$$

Изъ сего видно, что надлежитъ взять логариѣмы изъ таблицъ чиселъ 126, 125 и 300000. Оныя суть.

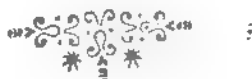
$$\begin{array}{rcl} \log 126 & = & 2,025305865 \\ \log 125 & = & 2,000000000 \\ \hline \log 126 - \log 125 & = & 0,025305865 \\ 10(\log 126 - \log 125) & = & 0,253058650 \\ \log 300000 & = & 5,47712125 \\ \hline \log S & = & 5,73017990 \end{array}$$

Чтобъ узнать, сколь велика будетъ сумма въ банкѣ спустя десять лѣтъ, надлежитъ найденному логариѣму сыскать соотвѣствующее число. Найденнаго логариѣма характеристика показываетъ, что число должно состоять изъ шести знаковъ; а мантисса означаетъ, что первые искомаго числа знаки будутъ 5372. Но почему точной мантиссы найденнаго логариѣма въ таблицахъ не находится, то указываетъ accuratѣйшее соответствующее ей число 5372,523. (6192) Но характеристика показываетъ, что искомое число должно состоять изъ шести знаковъ; слѣдовательно сумма банковая, по прошествии десяти лѣтъ, будетъ 537253, 3 рублей.

197) Такимъ же образомъ можно найти , сколько въ банкѣ будетъ денегъ по прошествіи пятидесяти лѣтъ , потому что сумма послѣ пятидесяти лѣтъ должна быть $(\frac{106}{105})^{50} \times 300000 = S$. Возьми съ обѣихъ сторонъ логариѣмы , и будетъ.

$$\begin{aligned} 50 \log 106 - 50 \log 105 + \log 300000 &= \log S \\ \log 106 &= 2,0253058 \\ \log 105 &= 2,0000000 \\ \hline \log 106 - \log 105 &= 0,0253058 \\ 50 \log 106 - 50 \log 105 &= 1,2652950 \\ \log 300,000 &= 5,4771213 \\ \log S &= 6,7424163. \end{aligned}$$

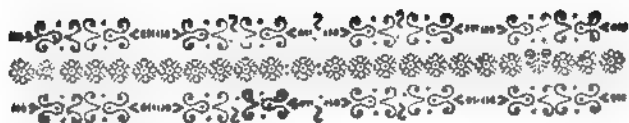
Теперь найденному логариѣму надлежитъ сыскать соотвѣтствующее число , и изъ характеристики онаго видно , что иско-мое число должно состоять изъ семи зна-ковъ , а изъ мантиссы , что первые онаго знаки должны быть 5526. А чтобъ про-чіе знаки сыскать , должно поступать по § 192 , и найдется соотвѣтствующее сему логариѣму число 5526068 , въ которомъ одинъ послѣдней знакъ сомнителенъ. Можетъ быть , что по прошествіи пятидесяти лѣтъ въ банкѣ будетъ 5526069 рублемъ.





НАЧАЛЬНЫЯ ОСНОВАНИЯ
ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ
ГЕОМЕТРИИ.

1. 2037 1949



ГЛАВА ПЕРВАЯ

О ЛИНЕЯХЪ , УГЛАХЪ , И БОКАХЪ
ФИГУРЪ.

ОПРЕДѢЛЕНІЕ 1.

1.

ТѢЛО Геометрическое есть , что
во всѣ стороны имѣетъ опредѣ-
ленное протяженіе. Протяженіе онаго
опредѣляется поверхностями, поверх-
ностями линиями , а линіи точками.

П р и м ѣ ч а н і е.

2) Хотя всякое тѣло имѣетъ три
размѣренія , то есть въ вышину , ширину ,
и длину , и оныхъ никакимъ образомъ отъ
тѣла отдѣлить не возможно ; однакожъ спо-
собность и въ краткихъ предѣлахъ содержа-
щейся разумъ преуменьш , чтобъ о всякомъ
размѣреніи изсѣловано было порознь. Изъ
опредѣленія тѣла Геометрическаго видно ,

К

что

что объ ономъ основательно разсуждать не можно , прежде нежели свойства почекъ , линей , и поверхностей , или плоскостей извѣстны будутъ . И для того надлежитъ начало здѣлать отъ почекъ , потомъ приступить къ линейамъ , потомъ къ поверхностямъ , а напоследокъ къ тѣламъ Геометрическимъ .

ОПРЕДѢЛЕНІЕ 2.

3) *Точка* [*Punctum*] есть знакъ никакой величины , но есть , никакого протяженія не имѣющей .

Примѣчаніе.

4) Иные почкою называютъ , что никакихъ частей не имѣетъ : Но какимъ бы образомъ она ни опредѣлена была , только неопредѣленно вѣдать надлежитъ , что точка Математическая есть нѣчто въ мысли представляемое , а въ самой вещи оной не имѣется . Строгость Геометрическая подала причину къ такому воображенію .

ОПРЕДѢЛЕНІЕ 3.

5) *Линия* [*Linea*] есть длина не имѣющая ни толщины , ни ширины .

Примѣ-

Примѣчаніе.

б) Такое количество, которое бы ни толщины, ни ширины, но только бы длину имѣло, можно вообразить слѣдующимъ образомъ. Когда точка, какую въ § 3 описали, будетъ двигаться отъ одного мѣста къ другому, по пути, которой опишетъ, будетъ имѣть одну только длину, и для того иныя линейю называють слѣдомъ, которой точка по себѣ оставляетъ. По сему концы линей должны быть точки.

ОПРЕДѢЛЕНІЕ 4.

7) *Прямая линейя* [Linea recta] есть самая кратчайшая изъ всѣхъ, которая отъ одной точки къ другой провести можно. Платонъ прямою линейю называетъ ту, которой концы загораживаютъ средину; Изъ сего можно видѣть, что будетъ *линейя кривая* [Linea Curva].

Примѣчаніе.

8) Линейя линейю не можетъ иначе пересѣчь, какъ въ одной точкѣ, и между двумя точками не можетъ болѣе какъ одна прямая линейя уместиться. Изъ сего слѣ-

сѣдуютъ , что ежели двѣ linee между двумя точками умѣщаются , и одна другую покрываетъ , то эти linee будучь между собою равны.

О П Р Е Д Ъ Л Е Н І Е 5.

9) *Поперѣхность* [Superficies] вообще называется величина , длину и ширину только имѣющая. А *плоская поперѣхность* или *плоскость* называется такая поперѣхность , которая въ длину и ширину по прямымъ линеймъ простирается , такъ чтобъ между всякими данными двумя точками проведенная на плоскости прямая линия вся падала на поперѣхность ; Изъ сего можно видѣть , что будетъ *хридая*.

П р и м ѣ ч а н і е.

10) Плоскою поперѣхностью , подобно какъ прямую линейю , можно назвать ту , которой края затерзаживають средину , или плоская поперѣхность есть самая кратчайшая между данными предѣлами. Происхождение такого количества , которое бы длину и ширину только имѣло , можно представить себѣ слѣдующимъ образомъ : Когда прямая линия концомъ своимъ по другой прямой или кривой

кривой линіѣ будетъ двигаться, то въ первомъ случаѣ произойдетъ прямая, а въ другомъ кривая поверхность.

11) Когда требуется, чтобъ на бумагѣ, которая плоскую поверхность представляетъ, провести прямую линію, то сколько возможно стараться должно, чтобъ она сходствовала съ тою, какую здѣсь представляемъ.

12) Имѣя понятие о точкахъ, линіяхъ и поверхностяхъ, прежде всего разсуждать надлежитъ о проведенныхъ двухъ прямыхъ линіяхъ на данной плоскости. Пусть сверхъ проведенной АВ, на бумагѣ плоскость Fig. представляющей, проведемъ чрезъ Р и другую прямую линію СD, которая ежели продолжится въ обѣихъ концахъ, то съ одной стороны или ближе подойдетъ станетъ къ АВ, или отъ нея отойдетъ далѣе, или ни отойдетъ, ни ближе подойдетъ. Продолженная въ сторону F линія СD, ежели приближаться станетъ къ линіѣ АВ, то ее пересѣчетъ гдѣ нибудь; а ежели продолжится въ сторону G, и отчасу болѣе удаляться будетъ, то чѣмъ больше въ ту же сторону продолжишь, тѣмъ больше будетъ отстоять отъ продолженной въ ту же сторону линіи АВ, такъ что на послѣдокъ разстояние между ими будетъ бесконечно. А ежели линіи, какъ LM и АВ,

и АВ, продолженные съ обѣихъ сторонъ ни ближе подходить, ни далѣе отходить одна отъ другой не будутъ, то всегда въ равномъ разстояніи между собою будутъ находиться.

ОПРЕДѢЛЕНІЕ 6.

13) Наклоненіе двухъ прямыхъ линий, на плоскости какой нибудь проведенныхъ, и взаимно себя пересѣкающихъ, называется *угломъ прямолинейной* [*angulus rectilineus*].

Примѣчаніе.

14) Когда только двѣ линии пересѣкаютъ себя въ точкѣ, то уголъ, который составляютъ, означаетъ одною литерою у **Fig.** верху угла написанною, какъ на примѣрѣ А.
2. А ежели много будетъ линий, въ одной точкѣ взаимно себя пересѣкающихъ, то уголъ означаетъ тремя литерами, изъ которыхъ средняя означаетъ верхъ угла. Такъ уголъ между линиями АС и АВ содержащейся означенъ будетъ слѣдующимъ образомъ АВС, а уголъ содержащейся между линиями АД и АВ будетъ DAC.

15) Величина угловъ не зависитъ отъ длины боковъ, но отъ наклоненія, которое

второе дѣлаютъ линейи уголъ составляющіе. Слѣдовательно углы будутъ равны, которыхъ наклоненія боковъ будутъ между собою равны, то есть, когда одинъ уголъ съ другимъ такъ сходствуетъ, что ежели положи одного верхъ на верхъ другого, бока одного упадутъ на бока другого, не смотря на неравенство боковъ, тогда углы будутъ равны между собою. А ежели положи верхи угловъ одинъ на другой, и одинъ бокъ на бокъ другого, другой бокъ упадетъ внѣ перваго угла, какъ бокъ AE падаетъ внѣ угла CAB ; то уголъ EAB будетъ больше, нежели уголъ CAB : а ежели другой AD упадетъ внутрь угла CAB , то уголъ DAB будетъ меньше угла CAB .

16) Изъ сего вопросъ, можно ли уголъ называть количествомъ, рѣшить не трудно. Многие утверждали, что углы къ количествамъ принадлежать не могутъ. Но понеже уголъ увеличиться и уменьшиться можетъ, въ углахъ можемъ раздѣлять части, и изъ двухъ данныхъ узнать, которой изъ нихъ больше; то безъ всякаго сомнѣнія углы между количествами почитать должно, съ тою разностью, что они особенной родъ количества составляющъ, и по сему отличительнымъ образомъ ихъ мѣрять должно.

ОПРЕДѢЛЕНІЕ 7.

Fig. 17) Ежели линия CD упадетъ на
3. другую AB, пакъ что смѣжные углы
[ang. contini] ADI и CDB будутъ равны
между собою; то линия CD называется
перпендикулярная [perpendicularis] къ
линей AB, а углы ADC и CDB назы-
ваются прямыми [recti].

ОПРЕДѢЛЕНІЕ 8.

Fig. 18) Ежели прямая линия ED на
3. другую пакъ упадетъ, что произ-
шедшие смѣжные углы ADE и EDB не
будутъ между собою равны, линия ED
называется косая [obliqua], а углы
ADE и EDB косые. Уголъ, копо-
рой больше прямого, какъ ADE, на-
зывается тупой [obtusus], а уголъ,
копорой меньше прямого, какъ EDB,
называется острой [acutus].

Слѣдствіе.

19) Понеже уголъ тупой ADE пре-
вышаетъ уголъ прямой угломъ CDE, и
тѣмъ же угломъ CDE уголъ острой меньше
угла прямого, слѣдовательно, какъ бы линия ED

на линію АВ ни упадала , сумма угловъ
произшедшихъ равна будетъ двумъ прямымъ.

Прииѣчаніе.

20) Ежели про линіи AD и DB такъ
разсуждать , будто бы они между собою
угловъ заключали , то сей угловъ будетъ ра-
венъ двумъ прямымъ : Слѣдовательно всякія
дѣя прамыя линіи, одну составляющія , дѣла-
ющъ угловъ равной двумъ прямымъ. Угловъ
прямой при опредѣленіи величины прочихъ
угловъ берется за мѣру , и для того ради
краткости можно оной означать литерою R,
угловъ равной двумъ прямымъ будетъ $\equiv_2 R$.

ОПРЕДѢЛЕНІЕ 9.

21) *Фигура* называется простран-
ство со всѣхъ сторонъ предѣлами огра-
ниченное. *Плоская фигура* будетъ
плоскость въ извѣстныхъ предѣлахъ
содержащаяся.

Прииѣчаніе.

22) Предѣлы фигуръ могутъ быть
прямыя линіи , кривыя и прамыя съ кривы-
ми перемѣшенныя. Фигуры , которыя между
тѣмижъ предѣлами умѣститься могутъ , и
такъ между собою сходствуютъ , что еже-

ли одна положится на другую , то верхняя нижнюю совершенно закроетъ , суть между собою равны. Но не всегда заключать должно , что фигуры , которыя взаимно себя не закрываютъ , суть не равны между собою ; ибо случится ~~можетъ~~ , что хотя фигуры взаимно себя не закрываютъ , однакожъ будутъ равны между собою.

ОПРЕДѢЛЕНІЕ 10.

23) *Кругъ* [Circulus] есть плоская фигура, окруженная одною такою свойства кривою линеею , что всякая оной точка равно отстоитъ отъ известной точки , находящейся въ срединѣ фигуры. Такая точка въ фигурѣ есть *С* , и называется *Центръ* [Centrum] . Кривая линия *АМВ* называется *Окружность* [Peripheria] . Расстояние между какою нибудь точкою окружности, какъ *М*, и центромъ *С* называется *радіусъ* или *полудіаметръ* [Radius] ; а линия , которая проходя чрезъ центръ пересѣкаетъ окружность въ двухъ мѣстахъ называется *діаметръ* [Diameter] .

Примѣчаніе.

24) Происхождение круга Геометры представляютъ себѣ слѣдующимъ образомъ ,

Ежели

Ежели линия $СМ$ около одного своего конца $С$ будетъ обращаться до тѣхъ поръ , пока не придетъ на прежнее свое мѣсто ; то самая линия опишетъ кругъ , а конецъ линии $М$ опишетъ окружность. Изъ сего явствуется , что въ кругѣ всѣ радиусы суть равны между собою , что поперешникъ есть вдвое больше радиуса , и что круги равными радиусами описанные , или которыхъ поперешники равны , суть также равны между собою.

25) Окружность круга есть ~~другая~~ ^{кр.} линия , о которой простая Геометрія разсуждаетъ , и которая при рѣшеніи задачъ употребляется , потому что оную такъ легко , какъ и прямую линию , изъ данной точки въ данномъ отъ оной разстояніи помощью циркуля на бумагѣ написать можно.

26) Окружность всякаго круга Геометры раздѣляютъ на 360 равныхъ частей , изъ которыхъ каждая называется градусъ , и обозначается ($^{\circ}$) , какъ на примѣрѣ 30 , значитъ три градуса. Всякой градусъ раздѣляютъ на 60 равныхъ частей , и такіе части , которыхъ 60 составляютъ одинъ градусъ , называются *минуты* , и обозначаются знакомъ ($'$) , на примѣрѣ 4' , значитъ четыре минуты. Всякая минута раздѣляется на 60 секундъ , которыхъ знакъ есть ($''$) ; секунда

да на бо терцій, и такъ далѣе, такъ что въ окружности каждаго круга будетъ содержаться 360 град: минутъ 21600, секундъ 1296000, терцій 77760000.

Fig. 5. 27) Уже выше сказано, что углы суть нѣкоторой родъ количествъ, и для раздѣленія оныхъ надлежитъ имѣть нѣкоторую особливую мѣру. Геометры употребляютъ къ размѣренію оныхъ дуги круговъ слѣдующимъ образомъ. Когда хотятъ вымѣрять данной уголъ $АСМ$; то ищутъ содержаніе дуги находящейся между боками $СМ$ и $СА$ къ цѣлой окружности изъ верьху угла описанной. Но содержаніе дуги $ам$ къ своей окружности $амбд$ есть одинако съ содержаніемъ дуги $АМ$ къ своей окружности $АМВД$. Слѣдовательно всякою дугою изъ точки $С$ между боками угла описанною данной уголъ мѣрять можно. Яснѣе сіе будетъ изъ послѣдующихъ.

Fig. 2. 28) Что дугу изъ верьху угла между боками содержащуюся за мѣру приняли, тому причину есть, что представить можно, вѣрно уголъ происходитъ равно какъ кругъ. Представь себѣ, будто бы бокъ $АД$ сперва положенъ былъ на бокъ $АВ$, потомъ началъ бы двигаться около точки $Ф$, такъ чтобъ въ оной былъ неподвиженъ, и напоследокъ дошедъ до точки $Д$ остановился. Такимъ образомъ всякая

всякая точка на линѣ **AD** взятая опишетъ дугу пропорциональную своему полуперпендикуляру.

29) Помощію описанія круга данныя двѣ линіи слагаются, и одна изъ другой вычитается слѣдующимъ образомъ: Пусть данныя линіи будутъ **AB** и **EF**: изъ точки **B** за центръ взятой разстояніемъ другой линіи **EF** опиши окружность круга помощію инструмента циркуль называемаго, и будетъ $AC = AB - EF$ и $AD = AB + EF$.

ОПРЕДѢЛЕНІЕ II.

30) *Прямолинейная фигура* [Rectilinea] называется, коипорой всѣ бока суть прямыя линіи; и ежели всѣ бока будутъ между собою равны такъ какъ и углы, то называется *регулярная* [Regularis]. Прочія фигуры, коипорыхъ бока суть кривыя линіи, или прямыя съ кривыми перемѣшанныя, называются *криволинейныя* [Curvilineæ].

П р и ж ѣ ч а н і е.

31) Всякая фигура, коипорой бока суть прямыя линіи, столько имѣетъ угловъ, сколько боковъ въ фигурѣ находится. Число фигуръ

фигура прямолинейная пространство между предѣлами своими заключаеа , по крайней мѣрѣ три бока имѣть должна.

ОПРЕДѢЛЕНІЕ 12.

32) И по сему фигура плоская прямолинейная , тремя боками окруженная, называется *треугольникъ* [*Triangulum*] : Фигура чепырьмя боками окруженная *четвероугольникъ* [*Quadrilaterum*] , пяпью боками ограниченная *пятиугольникъ* [*Pentagonum*] , и такъ далѣе. Вообще фигуры плоскія прямолинейныя больше, нежели чепыре бока, имѣющіяся называются *многоугольными* [*Polygonis*]

Примѣчаніе.

33) Происхожденіе треугольника изъ данной плоскости всякъ себѣ вообразить можетъ , ежели концы двухъ линей , уголъ составляющихъ , соединены будутъ прямою линіею . На примѣръ пусть данной уголъ бу-

Fig. 7. десть $\angle ABC$; бо а наклоненіе дѣлающе AB , BC , фигура , которую треугольникомъ называемъ , примѣетъ , ежели точки A и C линіею AC соединятся.

34) Въ фигурахъ ничего больше не примѣчается, какъ углы и линіи, и потому раздѣ-

леніе

ление фигуръ неотмѣнно отъ угловъ и боковъ брать должно будетъ , и по нимъ одинъ треугольникъ отъ другаго различать. По-
неже треугольникъ происходитъ отъ наклонныхъ между собою двухъ линей АВ и ВС , и претіею АС соединенныхъ; то явствуетъ , что въ треугольникъ могутъ быть всѣ бока неравные , или два между собою равные , или всѣ три равные.

О П Р Е Д Ъ Л Е Н І Е 13.

35) Треугольникъ , котораго всѣ стороны суть между собою равны , называется *равносторонной* [*aequilaterum*] котораго² бока только или двѣ стороны равны , называется *равнобокой* или *равнобедренной* [*aequicrurum*] ; а треугольникъ , котораго ни одинъ бокъ не равенъ другому , называется *неравносторонной* [*scalenum*].

О П Р Е Д Ъ Л Е Н І Е 14.

36) Ежели въ треугольникъ будетъ одинъ уголъ прямой , то треугольникъ называется *прямоугольной* [*Rectangulum*]. Ежели будетъ одинъ тупой , называется *тупоугольной*. [*Obtusangulum*] ; А ежели всѣ углы будутъ острые ,

острые , то называется остроугольной [*acutangulum*].

СПРЕДЪЛЕНІЕ 15.

37) Параллельныя linee [*lineae parallelae*] суть пѣ , которыя будучи на одной плоскости вездѣ между собою поѣ разстояніе имѣютъ , какъ далеко оныя ни пропянуты будутъ.

Примѣчаніе.

Fig. 8. 38) Разстояніе между точками , есть линия оныя соединяющая ; разстояніе точки отъ линии , есть перпендикулярная отъ точки къ данной линіѣ проведенная ; разстояніе между параллельными линиями должно разумѣть перпендикулярныя линіи къ параллельнымъ EF и GH.

ТЕОРЕМА 1.

Fig. 9. 39) Если на одну точку O прямой линіи угладутъ нѣсколько прямыхъ линіи OD, OE, OC ; то сумма угловъ , которые составляютъ линіи дѣлаютъ , какъ по одну сторону линіи АВ , такъ и по другую равна будетъ двумъ прямымъ угламъ

угламъ т. е. $\angle AOD + \angle DOE + \angle EOB = 2R$ и $\angle AOC + \angle COB = 2R$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО,

Понеже сумма угловъ со всякой стороны равна углу $\angle AOB$, а уголъ $\angle AOB$ равенъ двумъ прямымъ (20); следовательно $\angle AOD + \angle DOE + \angle EOB = 2R$, и $\angle AOC + \angle COB = 2R$.

Слѣдствіе.

40) Сумма всѣхъ угловъ около точки на плоскости какой нѣмудъ поставлен-ныхъ будетъ равна четыремъ прямымъ.

ТЕОРЕМА 2.

Fig.

41) Если линія CD пересѣчетъ другую AB въ точкѣ O , то углы на крестѣ $\angle AOC$ и $\angle DOB$ будутъ между собою равны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО,

Понеже $\angle AOD + \angle DOB = 2R$, также $\angle AOC + \angle AOD = 2R$ (20); следовательно будетъ $\angle AOD + \angle DOB = \angle AOC + \angle AOD$ и $\angle DOB = \angle AOC$ (40 Арх.:).

А

ТЕОРЕ-

ТЕОРЕМА 3.

Fig. 42) Если по двум сторонам треугольника ABC и abc будет $AC = ac$ и $AB = ab$, притом углы содержащиеся между этими сторонами будут равны, то есть $\angle CAB = \angle cab$, то и все другие части треугольников будут равны между собою. $C = c$, $B = b$ и $CB = cb$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Понеже бо $AB = ab$, то если треугольник AB положить на треугольник ACB , так чтобы точка A упала на точку A , бо ab упал на бо AB , то AB будет со всем закрыт, точка B упадет на точку B (b); а для равенства углов $\angle ACB$ и $\angle acb$, и бо AC и ac , бо ac упадет на AC , и его со всем закроет, точка c упадет на точку C ; следовательно бо cb должен будет утиснись и покрыть CB , и треугольник ACB со всем закрыт будет треугольником acb . По сему треугольники ACB и acb будут равны между собою (22), углы $C = c$, $B = b$, и $CB = cb$.

Слѣд.

Слѣдствіе 1.

43) Ежели въ двухъ треугольникахъ ABC и abc сверхъ того, что $AB=ab$, $AC=ac$, $BAC=bac$, будетъ притомъ $AB=AC=ab=ac$, то когда треугольникъ abc положиши на другой ABC , такъ чтобъ уголъ a упалъ на A , а бокъ ab упалъ на AC , тогда бокъ ac упадетъ на AB , и одинъ другаго закроетъ. Точка b упадетъ на точку C , точка c упадетъ на точку B , и бокъ cb упадетъ на бокъ CB ; слѣдовательно не только будетъ $b=B$, но еще $c=C$, то есть въ треугольникъ равнобокомъ углы равнымъ бокамъ противолежащие суть между собою равны.

Слѣдствіе 2.

44) По сему въ треугольникъ равносѣрономъ всѣ углы между собою будутъ равны, и такой треугольникъ будетъ фигура регулярная.

ТЕОРЕМА 4.

45) Ежели одного треугольника Fig. ABC сѣдетъ бокъ одинъ AB равенъ 12 боку ab другаго треугольника abc , и ло два угла одинакое положеніе въ разсужденіи сокопъ имѣющіе будутъ
А 2
между

между собою равны, напр: $A=a$, и $CBA=b$, то и другая части треугольника будут равны между собою: бо AC будет $=ac$, $CB=cb$, и $C=c$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Такъ какъ въ доказательствѣ прежней Теоремы пусть треугольника abc бокъ ab положенъ будетъ на AB ; тогда одинъ другого со всѣмъ закроетъ, и для равенства угловъ A и a , CBA и cb бокъ ac долженъ будетъ упасть на AC и бокъ cb упасть на CB ; следовательно точка c упадетъ на точку C . Нежели кто оудетъ спорить, что точка c упадетъ на другую какую нибудь точку на AB , тогда будетъ $AC=ac$. И такъ по прежней теоремѣ бокъ cb долженъ бы былъ упасть на бокъ CB , и уголъ CBA равенъ бы былъ углу cb . Но по положению уголъ $b=c$. следовательно бокъ AD не можетъ быть равенъ боку ac , и точка c не можетъ упасть на точку D . Тоже доказать можно о всякой другой точкѣ D подобной; следовательно точка c должна будетъ упасть на C , и будетъ $AC=ac$, $CB=cb$ и уголъ $C=c$.

Слѣд-

Слѣдствіе 1.

46) Если въ двухъ треугольникахъ
сверхъ положеній въ теоремѣ упомянутыхъ,
будетъ $a=A=b=B$; то когда треуголь-
никъ abc положенъ будетъ на другой, такъ
чтобъ уголъ b упалъ на уголъ A , а уголъ
 a упалъ на уголъ ABC , тогда c упадетъ
на AC , ac упадетъ на CB , и будетъ cb
 $=AC$, $ac=CB$; следовательно бока cb
будетъ $=AC$, $ac=CB$ и въ треугольникѣ
два угла равные имѣющемъ, бока имъ про-
тиволежащие будутъ между собою равны.

Слѣдствіе 2.

47) И такъ, ежели въ какомъ пре-
угольникѣ будутъ всѣ углы равны между со-
бою, то и въ бока будутъ равны же меж-
ду собою, и треугольникъ равноугольной
будетъ фигура регулярная.

ТЕОРЕМА 5.

48) Если въ двухъ треуголь-
никахъ всѣ бока одного треугольни-
ка равны судутъ также другого,
то и всѣ углы равны и бока
противолежащие судутъ между со-
бою равны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Fig. Пусть треугольники будут $\triangle ACB$ и $\triangle acb$, въ которыхъ $AC = ac$, $AB = ab$ $CB = cb$. Положимъ, что треугольникъ $\triangle acb$ приложенъ къ треугольнику $\triangle ACB$, такъ какъ фигура представляется, то есть, чтобы бокъ ac покрывалъ бокъ AC , а точка c упадала по другую сторону лини AB . Теперь соединимъ линіею точки C и c , и произойдутъ два треугольника $\triangle ACc$ и $\triangle BCc$ равнобокие; слѣдовательно уголъ $\angle ACE = \angle ACE$; и уголъ $\angle ECB = \angle ECB$ и $\angle ACB = \angle acb$ (40 Ариѳм.). Изъ сего явствуетъ, что треугольникъ $\triangle ACB$ равенъ будетъ треугольнику $\triangle acb$ (42).

Слѣдствіе.

49) Изъ данныхъ трехъ боксовъ всегда тотъ же треугольникъ произойти долженъ.

ТЕОРЕМА 6.

50) Если въ двухъ треугольникахъ прямоугольныхъ $\triangle ABC$ и $\triangle abc$ бока уголъ острой заключающе будутъ между собою равны, какъ $\angle C$

$\angle C = \angle c$; $\angle B = \angle b$, то и третьей боковой стороне AB будет равен боковой стороне ab , и треугольники будут равны между собою.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Предположим, что треугольник abc приложен к стороне BC треугольника ABC , так, чтобы точка c упала на C и a упала на A . Поскольку углы a и A суть прямые, сторона ab должна продолжиться по прямой линии BA , и точка b упадет по другую сторону от точки A на продолжении BA , в разсуждении точки B , и так произойдет треугольник BCb равнобедренный, и для того угол B будет $\angle b$ (43) и треугольник ABC будет равен треугольнику ACb (+2).

ЗАДАЧА I.

51) Из данных трех линий из которых каждая меньше, нежели сумма других, построить треугольник.

РѢШЕНИЕ.

Пусть будут данные линии A, B, C . На прямой линии DE по произвольному
А 4
леню

лечию взятой описки. $DE = A$, $EG = B$, и $DH = C$, изъ точекъ E и D съ разнореніями EG и DH опиши два круга, которые гдѣ ниудѣ себя пересѣчь должны будутъ. Пусть мѣсто, гдѣ взаимно себя пересѣкутъ будетъ F , изъ котораго къ точкамъ E и D проводи линіи FE и DF , то произойдетъ DFE искомой треугольникъ.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Почѣже $EG = A = FE$ и $DH = C = DF$, а $DE = A$; слѣдовательно и треугольникъ изъ данныхъ трехъ линій вѣланъ.

Слѣдствіе.

52) Если изъ данныхъ трехъ боковъ два будутъ между собою равны, то произойдетъ треугольникъ равнобедренной; слѣдовательно треугольникъ равнобедренной изъ даннаго основанія и одного боку, который долженъ быть больше половины основанія, описать можно. А если вѣска будутъ между собою равны, то произойдетъ треугольникъ равнобедренной; и такъ изъ даннаго одного боку треугольникъ равнобедренной описать можно.

ЗАДАЧА

ЗАДАЧА 2.

53) Сб одного мѣста на другое Fig. означенное на линеехъ АВ, перенести 16. данной уголъ С.

РѢШЕНИЕ.

Пусть означенное на линеехъ АВ мѣсто будетъ А ; у даннаго угла на бокахъ отсѣки по произволению линеехъ CD и CE , и соедини точки D и E линеею DE , изъ данныхъ прехъ линей CD , CE , DE на линеехъ АВ изъ точки А здѣлай треугольникъ AFG , въ которомъ бы было $AF=CD$, $AG=CE$, $FG=DE$, то будетъ и уголъ $A=C$ (48).

ТЕОРЕМА 7.

54) Если двѣ параллельныя линеехъ АВ и CD пересѣчены будутъ третьею EF въ точкахъ I и H , то будетъ $\angle AIF=\angle H$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Изъ точекъ I и H проводи перпендикулярныя линеехъ АВ и CD , которыя 17. бу-

будути означать различіе между параллельными AB и CD , и будути равны между собою (37). Такимъ образомъ произойдути два треугольника GHI и INK , въ которыхъ углы G и K будути прямые, $GI=IK$ и боки IH общими треугольникамъ общимъ. Следовательно треугольники $GHI=INK$ (50) и уголъ $AIF=END$.

Слѣдствіе 1.

55) Понеже уголъ $AIF=$ углу END , а уголъ $AIF=EIB$ (41); следовательно, когда двѣ параллельныя линии пересѣчены будути третьей, то будетъ $EIB=END$ (34 ариѳм.).

Слѣдствіе 2.

56) Уголъ EIB взятой вмѣстѣ съ угломъ BIN равенъ двумъ прямымъ; но уголъ $EIB=END$, следовательно $BIN+END=2R$.

Слѣдствіе 3.

Fig.

18.

57) Если будетъ много линий параллельныхъ между собою, какъ AB , CD ; GH , и пересѣчены будути всѣ линеею EF , то углы EIB , EKD , ELN всѣ будути между

жду собою равны, и равны угламъ $\angle AIF$, $\angle SKF$, $\angle GKF$, $\angle GLF$ и $\angle BIK + \angle IKD = R$, такъ какъ и $\angle DKM + \angle KLN = R$.

ТЕОРЕМА 8.

§ 8) Если двѣ линии AB и CD Fig. пересѣчены будутъ третьею EF , 19. такъ чтобъ уголъ $\angle AIF$ былъ равенъ углу $\angle END$, то линии AB и CD будутъ параллельны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Если линия AB не параллельна линіи CD , то будетъ другая какая нибудь параллельна, которая пройдетъ по точкѣ I . Пусть она будетъ LM , и для того по прежней Теоремѣ уголъ $\angle LIF$ долженъ бы быть равенъ углу $\angle END$. Но по положению уголъ $\angle LIF = \angle END$, а уголъ $\angle LIF$ есть больше угла $\angle END$; следовательно линия LM не будетъ параллельна линіи CD . Тоже можно доказать о всякой линіи проведенной чрезъ точку I , которая имѣетъ уголъ меньшей или большей угла $\angle AIF$; следовательно линия AB будетъ параллельна линіи CD .

Слѣд-

Слѣдствіе 1.

59) Если двѣ линіи AB и CD пересѣчены будущею премою EF , такъ чтобъ уголъ KIB равенъ былъ углу END , то линіи AB и CD будутъ параллельны, потому что когда $EIB = END$, то будетъ и $AIF = \text{внѣшн.}$.

Слѣдствіе 2.

60) Параллельны также линіи AB и CD будущею, если линія EF снѣе такъ пересѣкаетъ, чтобъ сумма внутреннихъ угловъ $BIF + END$ равна была двумъ прямымъ вмѣстѣ взятымъ; потому что $AIF + BIF = 2R$, а если и $BIF + END = 2R$, то будетъ $AIF + BIF = BIF + END$, и $AIF = END$.

ОПРЕДѢЛЕНІЕ 16.

61) Чепвероугольникъ, котораго бока противоположаще сущѣ параллельны между собою, называется *параллелограммъ* [parallelogramm].

Слѣдствіе 1.

Fig. 20. 62) Пусть будетъ параллелограммъ $ABCD$. Понеже $A + C = 2R$, и $B + D = 2R$, также $C + D = 2R$ и $A + B = 2R$; слѣдовательно

тельно будетъ $A=D$, $C=B$, т. е. во всякомъ параллелограммѣ углы противолежащія суть между собою равны.

Слѣдствіе 2.

63) Если въ параллелограммѣ одинъ уголъ будетъ прямой, то и всѣ будутъ прямые.

ОПРЕДѢЛЕНІЕ 17.

64) Четырехугольникъ, въ которомъ всѣ углы суть прямые, называется *прямоугольникъ* [Rectangulum]; а если при томъ всѣ бока будутъ между собою равны, называется *квадратъ* [Quadratum]. Фигура, въ которой копия бока и будутъ всѣ равны между собою, но углы не прямые, называется *ромбъ* [Rhombus].

ЗАДАЧА 3.

65) Линіѣ АВ на плоскости пропеленной, чрезъ данную точку С пропестъ параллельную линію.

РѢШЕНІЕ.

Чрезъ точку С проведи какую нибудь линію ED, которая бы пересѣкла линію

линею AC. У точки C поспавъ уголъ ECG или FCD, который бы равенъ былъ углу EDB (53); линия FG будетъ параллельна линиѣ AB (55).

ТЕОРЕМА 9.

66) Во всякомъ треугольникѣ всѣ три угла имѣютъ пзятые равны двумъ прямымъ.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Fig. 22. Чрезъ точку C проведемъ основанію AB параллельную линію DE, по сло- ло точки C будупъ пр. угла $\angle ACD + \angle ACB + \angle BCE = R$ (39). А поже линия DE параллельна линіѣ AB, то будепъ $\angle ACD = \angle CAB$, и $\angle BCE = \angle ABC$ (54). Слѣ- дован сльн $\angle ACD + \angle ACB + \angle BCE = \angle CAB + \angle ACB + \angle ABC = R$.

Слѣдствіе 1.

97) Если какой ни удъ бокъ тре- угольника продолжится какъ AB, по пр. из- депъ уголъ CBF внѣшней [externus] назы- ваемой, и будетъ равенъ двумъ внутрен- нимъ угламъ треугольника углу CBF про- шиволежащимъ, потому что $\angle CAB + \angle ACB + \angle ABC$

$+ABC = 2R$ и $ABC + CBF = 2R$ (39); следовательно будетъ $CAB + ACB + ABC = ABC + CBF$, и $CAB + ACB = CBF$ (40 Ариѣм:).

Слѣдствіе 2.

68) Если въ треугольникѣ одинъ уголъ будетъ прямой, то сумма двухъ прочихъ равна будетъ прямому; и по сему сумма двухъ угловъ въ треугольникѣ меньше должна быть, нежели сумма двухъ прямыхъ.

Слѣдствіе 3.

69) Во всякомъ треугольникѣ, если данъ будетъ одинъ уголъ, то и сумма прочихъ будетъ извѣстна. И такъ, если въ треугольникѣ одинъ уголъ будетъ прямой, то сумма двухъ остальныхъ должна равна быть углу прямому. Следовательно оба будутъ острые, и въ треугольникѣ не можетъ больше быть, какъ одинъ уголъ прямой, такъ какъ и тупой.

Слѣдствіе 4.

70) Если въ треугольникѣ какомъ либо сумма двухъ угловъ дана будетъ, то и третей будетъ извѣстенъ. И понеже въ треугольникѣ равнобокомъ углы равнымъ бокамъ

бокамъ противоположные суть между собою равны, то ежели уголъ одному изъ нихъ противоположной данъ будетъ, то и другой будетъ извѣстенъ, попомъ и претей. Пусть данъ уголъ будетъ \hat{A} , то и другой будетъ \hat{A} ; следовательно претей $\hat{B} = R - \hat{A}$. А ежели претей данъ будетъ \hat{B} , то сумма двухъ прочихъ будетъ $\hat{A} + \hat{B} = R$, всякой изъ ихъ порознь $\hat{A} = R - \hat{B}$.

↑ $R - \hat{B}$.

Слѣдствіе 5.

71) Во всякомъ треугольникѣ равно-
сторонномъ всѣ углы суть между собою рав-
ны, то всякой изъ нихъ будетъ $\hat{A} = \frac{2}{3}R$.

ТЕОРЕМА 10.

72) Во всякой фигурѣ прямо-
линейной сумма внутреннихъ угловъ по
оной находящихся равна двукратъ
полямъ, умноженнымъ на число
боковъ, отъявъ изъ того четыре
угла прямыхъ.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Fig. Пусть будетъ фигура ABCDE, чи-
23. сло боковъ $= N$. Изъ точки O внутри
фигуры взятой ко всѣмъ угламъ прове-

ди

ди прямая линии OA, OB, OC, OD, OE : такимъ образомъ произойдетъ столько треугольниковъ, сколько въ фигурѣ боковъ находится. А понеже всякаго треугольника сумма угловъ $= 2R$; следовательно сумма всѣхъ угловъ въ треугольникахъ находящихся будетъ $= N \times R$: Но около точки O всѣ углы взятые сумъ $= 4R$. Следовательно $A+B+C+D+E = N \times R - 4R$. $2 \times R - 4R$

Слѣдствіе 1.

73) Во всякомъ четырехугольникѣ сумма всѣхъ угловъ равна четыремъ прямымъ, въ пятиугольникѣ шести, въ шестиугольникѣ восьми, и такъ далѣе.

Слѣдствіе 2.

74) Если фигура будетъ регулярная, то уголъ такого полигона найдется, ежели сумму всѣхъ угловъ въ ономъ находящихся раздѣлишь на число боковъ, то есть искомой уголъ будетъ $= \frac{(2N-4)R}{N}$.

Слѣдствіе 3.

75) Если какого нибудь полигона Fig. всѣ бока продолжены будутъ, какъ фигура 24-
мъ пока-

показывается; то сумма угловъ внутреннихъ
 полигона съ внѣшними, которые произой-
 дутъ отъ продолженія боковъ будетъ $= N \times R$.
 Но углы внутренние полигона $ABC, BCD,$
 CDE, DEF, EFA, FAB вмѣстѣ взятые съ
 углами около точки O положеніе имѣющи-
 ми также $= N \times R$, то есть $ABC + CBI +$
 $BCE + KCD + CDE + EDL + DEF + FEM + EFA$
 $+ AFG + FAB + BAN = ABC + BCD + CDE +$
 $DEF + EFA + FAB + R$. слѣдовательно CBI
 $+ KCD + EDL + FEM + AFG + BAN = R$.
 То же должно разумѣть о всякомъ полигонѣ,
 то есть сумма угловъ внѣшнихъ равна че-
 тыремъ прямымъ.

ЗАДАЧА 4.

76) Данной уголъ раздѣлится
 на двѣ равныя части.

РѢШЕНІЕ.

Fig. Пусть даннѣй уголъ будетъ ABC .
 25. на бокахъ AB и BC изъ точки B отсѣ-
 ки по равной линіи DB и BE ; потомъ
 точки D и E соедини линіею DE , на
 линіи DE здѣлай какой нибудь преу-
 гольникъ равнобокой DFE : На послѣдокъ
 изъ точки F къ точкѣ B проведи пря-
 мую линію BF , которая данной уголъ
 раздѣ-

раздѣлишь на двѣ равныя части ΔBF и FBC .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Въ треугольникахъ BDF и BEF боки $BD=BE$, боки $DF=$ боку EF , а BF общимъ треугольникамъ общей; слѣдовательно треугольникъ $BDF=$ треугольнику BEF (§ 48), и уголъ $DBF=$ углу EBF .

Слѣдствіе 1.

77) Подобнымъ образомъ уголъ равной Fig. двумъ прямымъ на двѣ части раздѣлится, 26. то есть чрезъ данную точку на прямой линіи проведется къ ней перпендикулярная (§ 17). Пусть данъ будетъ уголъ ACB раздѣлится на двѣ равныя части, то есть чрезъ точку C проведеть перпендикулярную къ линіи AB . Изъ точки C возми $CD=CE$, и на линіи DE поставь треугольникъ равнобокой DFE : линія изъ F къ точкѣ C проведенная раздѣлитъ уголъ ACB на двѣ равныя части, и будетъ перпендикулярна къ линіи AB .

Слѣдствіе 2.

78) Понеже въ треугольникѣ DFE боки $DF=FE$, и треугольникъ $DFC=$ пре-
М 2 угольнику

угловнику FCE , то и углы между равными боками содержащиеся будутъ между собою равны. Слѣдовательно ежели въ треугольникъ равнобокомъ къ основанію проведется изъ верху линия FC , котораябы оное дѣлила на двѣ равныя части; то не только FC перпендикулярна будетъ къ линіи DE , но какъ уголъ основанію противоположащей, такъ и треугольникъ DFE раздѣлится на двѣ равныя части.

ЗАДАЧА 5.

79) Данную линію AB раздѣлить на двѣ равныя части.

РѢШЕНІЕ.

Fig. 27. На линіи AB здѣлай треугольникъ равнобокой ACB ; попомъ уголъ ACB раздѣли на двѣ равныя части, какъ выше сего показано, линія CD , которая дѣлится будетъ уголъ на двѣ равныя части, раздѣлитъ также и линію AB на двѣ равныя части.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Почему $AC = CB$, уголъ $ACD =$ углу DCB , и линія CD обѣимъ треугольникамъ, какъ треугольнику AEC такъ

такъ и преугольнику DCB (бшая ;
сдбдвателно преугольнику $ACD =$
преугольнику CDB (§ 2), и линия AD
равна будетъ линей DB

Слѣдствіе.

80) Ежели въ преугольникѣ равно-
бокомъ проведецца изъ верху линия CD ,
которая бы дѣлила уголъ на двѣ равныя ча-
сти, то не только линей AB , но и цѣ-
лой преугольникъ раздѣлитъ на двѣ равныя
части, и къ основанію будетъ перпендику-
лярна.

ЗАДАЧА. Б.

81) Изъ точки какой нибудь хд
данной линей пропестъ перпендику-
лярную линей.

рѣшеніе.

Пусть будетъ данная линия AB и Fig.
точка C , изъ которой съ распвореніемъ ^{28.}
циркула по произволению взятымъ опиши
дугу EFG , которая бы проѣзжала
линей AB въ двухъ точкахъ E и G ;
линей EG раздѣли на двѣ равныя ча-
сти въ точкѣ D , линия CD будетъ
искомая перпендикулярная.

и 3

ДОКА-

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Понеже CE и CG суть полуперпендикуляры поперечной круга, то будетъ $CE=CG$, потомъ $ED=GD$, а CD общимъ треугольникамъ, какъ треугольнику CED , такъ треугольнику EDG общей, следовательно треугольники $CED =$ треугольнику EDG (§ 45), и уголъ $CDA =$ углу CDB , следовательно суть прямые (§ 17).

ТЕОРЕМА II.

82) Во всякомъ треугольникѣ бокъ большей противолежитъ углу большему.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Fig. 29. Если въ треугольникѣ ACB будетъ уголъ CBA больше угла CAB , то надлежитъ доказать, что AC будетъ больше нежели CB . Здѣлай уголъ DBA равнымъ углу CAB , и будетъ $AD=DB$ (§ 46). Потомъ придай къ общимъ CD , то будетъ $AD+DC=DB+CD$. Но $DB+CD$ есть сумма двухъ боковъ въ треугольникѣ BDC , которая должна быть больше, нежели бокъ AC . Следовательно

тельно $DB+DC=AC$ будетъ больше ,
нежели бокъ треугольника CB .

Слѣдствіе 1.

83) Въ треугольникъ прямомъ бокъ
углу прямому противоположащей есть большей
изъ всѣхъ прочихъ. Въ треугольникъ тупо-
угольномъ большей бокъ будетъ тупому
углу противоположащей.

Слѣдствіе 2.

84) Если изъ точки какой нибудь, Fig.
какъ C , къ линіи AB опустится перпенди- 30.
кулярная CD ; то она будетъ самая крат-
чайшая между точкою C и линіею AB , по-
тому что ежели проведешь какую нибудь
другую какъ CE , то въ треугольникъ пря-
моугольномъ CDE бокъ CE противоположа
будетъ углу прямому.

Слѣдствіе 3.

85) Если изъ точки C проведена
будетъ другая линія CG внѣ угла DCE ;
то она будетъ больше , нежели CE , по-
тому что въ треугольникъ CGE , бокъ CG
противолежитъ углу тупому (§ 83). То же
должно разумѣть и о другихъ линіяхъ изъ
точки C внѣ угла DCE или DCG проведенныхъ.

Слѣдовательно чѣмъ точка G на линіи AB уда-
лѣе отъ точки D берется, тѣмъ линія CG
будетъ больше, и по одну сторону линіи CD
двѣ линіи изъ точки C проведенныя равны
между собою быть не могутъ. Но ежели
по другую сторону линіи CD возмемъ FD
 $\equiv DE$, то будетъ $FC \equiv CE$ (§ 42) изъ
сего видно, что изъ точки C къ линіи не
можно больше двухъ линій провести равныхъ
между собою.

Слѣдствіе 4.

86) Если данъ будетъ бокъ CG
и уголъ CGA , и при томъ бокъ данно-
му углу противолежащей; то ежели
данной бокъ будетъ меньше, нежели
перпендикулярная CD , треугольника описать
не можно. Если оной будетъ равенъ пер-
пендикулу, то изъ сихъ данныхъ не мож-
но больше описать, какъ одинъ треугольникъ;
а ежели бокъ данной будетъ больше перпен-
дикулярной CD , а меньше боку CG ; то
два треугольника здѣланы быть могутъ CEG
и CFG , потому что $CF \equiv CE$, и одинъ
только треугольникъ здѣлать можно, еже-
ли данной бокъ будетъ равенъ боку CG ,
или его больше. Изъ сего яствуетъ, что
изъ данныхъ двухъ боковъ и угла между ими не-
содержащагося треугольникъ не всегда опре-
дѣлить можно.

Примѣ

Примѣчаніе.

87) Теперь можно видѣть, что дано быть должно, чтобъ треугольникъ описать можно было, а именно: когда даны будутъ 1) два бока и уголъ между ими содержащейся. 2) бокъ и два угла при бокѣ данномъ находящиеся. 3) рѣшъ при бока, и 4) въ треугольникѣ прямоугольномъ два бока уголъ острый заключающие. въ § 51 дано рѣшеніе, коимъ образомъ изъ данныхъ трехъ линей треугольникъ дѣлать должно. Прочихъ случаевъ рѣшенія сообщены будутъ послѣ.

ГЛАВА 2.

о кругѣ и фигурахъ въ немъ и около
его описанныхъ.

опредѣленіе 18.

88) Прямая линия АВ двѣ точки Fig. 31. окружности А и В соединяющая называется хорда [Chorda] частицей, на которой она окружность раздѣляетъ, а части окружности ADB и AEB называющіяся дуги [Arcus].

Слѣдствіе.

89) Такимъ образомъ и поперешникъ, линия которая проходитъ чрезъ центръ круга, называться можетъ хордою.

ТЕОРЕМА 12.

90) Хорда не можетъ больше прорѣзать окружность, какъ двѣ точки.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Fig. 32. Положимъ, что хорда АВ прорѣжетъ окружность въ трехъ точкахъ А, В и D, то изъ центра С проведенныя къ точкамъ А, В, D прямая линии должны быть между собою равны (§ 24), но CD больше, нежели BC. Слѣдовательно хорда въ трехъ точкахъ окружность прорѣзать не можетъ, ни окружность пройти чрезъ три точки на той же и одной прямой линіи находящіяся.

ОПРЕДѢЛЕНІЕ 19.

91) Всякая часть круга ADB и AEB, на которые хорда раздѣляетъ называется сегментъ [Segmentum], а фигура

гура между радиусами и дугою содержащаяся называется секторъ [Sector].

ТЕОРЕМА 13.

92) Если въ томъ же кругѣ ^{Fig. 33.} или въ двухъ разныхъ между собою радиусы AC , CB и $с$, съ разные углы ACB и $асв$ заключаютъ, то какъ секторы $ACBD$ и $асbd$, такъ и дуги ADB и $адб$ будутъ между собою равны. И обратно, ежели въ разныхъ кругахъ будутъ секторы или ихъ дуги равны между собою, то и углы между радиусами содержащиеся будутъ равны же.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Пусть будетъ 1) уголъ $ACB =$ углу $асв$. Представь себѣ, что центръ круга ADB положенъ на центръ круга $асв$ 26 такъ чтобы радиусъ $с$ упалъ на AC , то точка $а$ упадетъ на A , радиусъ $св$ упадетъ на CB , такъ что и точка $в$ упадетъ на точку B , и дуга $асв$ упадетъ на AB . Ибо ежели бы дуга $асв$ не упала на AB ; но на AdB , то бы было $Cd = CD$, чему быть не можно. Для подобной причины дуга $асв$ ни внутри

внутри дуги AB упасть не можетъ. Следовательно дуга ab упадетъ на AB , и будучи между собою равны, такъ какъ и секторы ACB и acb .

2) Пусть будетъ дуга $ab = AB$, и ежели уголъ ab не будетъ равенъ углу ACB , то найдемъ ему равной BCE , и будетъ $EAB = ab$ (нум. 1); но $ab = AB$ следовательно и AB должна быть $= AE$, чего быть не можетъ. Следовательно уголъ $ACB =$ углу ac . Подобнымъ образомъ докажется равенство угловъ, ежели секторы будутъ равны.

Слѣдствіе 1.

Fig. 34. 93) Ежели данъ будетъ уголъ какойнибудь ACB и изъ верьху C съ разтвореніемъ по произволению взятымъ опишется дуга AB , и ежели уголъ ACB раздѣлится на нѣсколько равныхъ частей ACF , FCD , DCE и ECB , то на столькожъ равныхъ частей и дуга раздѣлится, и обратно, ежели дуга на нѣсколько равныхъ частей раздѣлена будетъ въ точкахъ F , D , E , и чрезъ оныя проведутся linee FC , DC , EC , то и уголъ на столькожъ равныхъ частей раздѣленъ будетъ.

Слѣд-

Слѣдствіе 2.

94) Ежели въ кругѣ проведутся два поперешника AB и ED , такъ чтобъ углы у центра были прямые, то есть $\angle ACE = \angle ECB = \angle BCD = \angle ACD$, то и окружность раздѣлена будетъ на четыре равныя части откуда видно, что всякой поперешникъ кругъ и его окружность раздѣляетъ на двѣ равныя части. Fig 35.

Слѣдствіе 3.

95) Ежели изъ верьху угла C дуга между боками CA и CB описанная будетъ четверть окружности, то уголъ ACB будетъ прямой, ежели меньше четверти окружности, вострой, а ежели больше четверти окружности то уголъ будетъ тупой. фиг. 36.

ТЕОРЕМА 14.

96) Ежели въ томъ же кругѣ, или въ двухъ равныхъ кругахъ дуги будутъ равныя хорды, то дуги или отрѣзанныя и сегменты будутъ между собою равны: И ежели въ равныхъ кругахъ пзаны будутъ равныя дуги, то хорды или соотношяющіяся, и сегменты будутъ между собою равны же.

ДОКА-

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Fig. 36. 1) Пусть въ равныхъ кругахъ ABD и abd хорда AB будетъ равна хордѣ ab , то понеже $AC=CB=a=c$ преугольникъ ACB будетъ равенъ преугольнику acb , уголъ $ACB=$ углу acb (§ 48). Дуга AB будетъ равна дугѣ ab . Секторъ $ACB=$ сектору acb (§ 92). Сегментъ $AEB=$ сегменту aeb , дуга $ADB=$ дугѣ adb Сегментъ $ADB=$ сегменту adb (§ 40 Ариѳ.).

2) Если дуга $AEB=$ дугѣ aeb , то будетъ и уголъ $ACB=$ углу acb (§ 92). Следовательно секторъ $ACBE=$ сектору $acbe$, преугольникъ $ACB=$ преугольнику acb , хорда $AB=$ хордѣ ab , и сегментъ $AEB=$ сегменту aeb

Слѣдствіе.

Fig. 37. 97) И такъ, когда надобно отъ окружности ACB или какой другой отрѣзать дугу DE тѣмъ же радиусомъ опианную, то надлежитъ меньшей дуги взять хорду DE , и ее перенести изъ точки A на C , тогда будетъ хорда $AC=$ хордѣ DE , и дуга $ED=$ дугѣ AC , а $CB=ACB-DE$.

ТЕОРЕ-

ТЕОРЕМА 15.

98) Если изъ центра круга къ хордѣ проведена будетъ перпендикулярная, то она хорду и дугу ей соответствующую раздѣлитъ на двѣ равныя части: И обратно линия, которая хорду дѣлитъ на двѣ равныя части, и чрезъ центръ проходитъ къ хордѣ будетъ перпендикулярна: Также линия, которая хорду раздѣляетъ на двѣ равныя части, и къ ней перпендикулярна проходитъ чрезъ центръ круга.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Пусть будетъ въ кругѣ $AEBF$, Fig. 38. котораго центръ есть C , хорда AB , и къ ней изъ C проведена перпендикулярная CD . Проведи также изъ центра C линии CA и CB , такимъ образомъ произойдетъ треугольникъ равнобокой ACB , следовательно линия CD , если будетъ перпендикулярна къ линіи AB , то ее пересѣчетъ на двѣ равныя части (§ 50) и уголъ ACE будетъ равенъ углу BCE . Продолжи теперь линию CD въ обѣ стороны до окружности,

спи, и проводи хорды AE , BE и AF , BF . Понеже уголъ $ACD =$ углу BCE , то будетъ и дуга $AE =$ дугѣ EB , хорда $AE =$ хордѣ EB (§ 92 96). Понимъ уголъ $FCB =$ углу FCA , то будетъ и дуга $AF =$ дугѣ FB и хорда $AF =$ хордѣ BF .

2) Если линия CD проходящая чрезъ центръ пересѣчетъ хорду на двѣ равныя части, то будутъ углы ADC и CDB прямые (§ 78).

3) Когда линия EF будетъ перпендикулярна къ линіѣ AB , и ее раздѣлитъ на двѣ равныя части, то будутъ въ треугольникахъ ADE и EDB , $AD = DB$, уголъ $ADE =$ углу BDE , DE общимъ общая; следовательно какъ хорды AE и EB такъ и дуги AE и EB будутъ равны между собою (§ 42, 92) такимъ же образомъ докажемъ (уделимъ что хорда $AF =$ хордѣ BF и дуга $AF =$ дугѣ FB . Следовательно и $EAF = EBF$, и линія EF будетъ перпендикулярна.

Слѣдствіе 1.

99) Когда требуется данную дугу раздѣлить на двѣ равныя части, то надлежитъ

Житѣ хорду ея перпендикулярною линеею раздѣлить на двѣ равныя части , и продолжить до дуги.

Слѣдствіе 2.

100) Изъ сего видно , коимъ образомъ въ данномъ кругѣ центрѣ найти можно. Fig. 39.
Пусть будетъ данный кругъ AFB , въ немъ по произволію проводи хорду AB , и ее раздѣли на двѣ равныя части , чрезъ средини хорды D проводи къ ней перпендикулярную линеею EF , которая бы окружность прѣзывала , на послѣдокъ линеею EF раздѣля на двѣ равныя части въ точкѣ C , которая будетъ искомою центрѣ.

ЗАДАЧА 7.

101) Чрезъ данныя три точки , которыя бы не на одной прямой линіи положены были , или около даннаго треугольника описать кругъ.

рѣшеніе.

Пусть данныя точки будутъ A , B , C ; соедини ихъ прямыми линіями Fig. 40.
 AB , BC , и раздѣли всякую на двѣ равныя части въ точкахъ D и E , чрезъ
и копо-

которыя проводи къ соединяющимъ данныя точки линеймъ перпендикулярныя линей FD и GE, и ихъ до пѣхъ мѣстѣ продолжи, пока взаимно себя не пересѣкутъ, на примѣрѣ въ Н, изъ точки Н разстоянемъ АН, или ВН, или СН опиши кругъ, которой пройдеиъ чрезъ данныя три точки.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Проведи линей НС, НВ, НА. По-неже въ преугольникахъ ВЕН, СЕН углы ВЕН и СЕН суть прямые, ВЕ—ЕС, и ЕН обоимъ преугольникамъ общая, то будетъ $ВН=СН$ (§ 42) Для подобной причины будетъ и $ВН=АН$. Слѣдовательно $СН=ВН=АН$, и окружность изъ точки Н описанная пройдеиъ чрезъ точки А, В, С.

Слѣдствіе.

102) Если дана будетъ дуга како-
 Fig. 102) нибудь круга, то онаго центрѣ найти
 41. можно будетъ. Пусть будетъ данная дуга
 ABC. По произволению проводи двѣ хорды
 АВ и ВС, разѣли всякую изъ нихъ на двѣ
 равныя части перпендикулярными линейми
 FD

FD и GE , гдѣ помянутыя линіи себя взаимно пересѣкутъ, шутъ будетъ искомымъ центръ.

ОПРЕДѢЛЕНІЕ 20.

103) *Касательная* [*Tangens*] линія называется, копорая чрезъ какую нибудь точку окружности такъ проходитъ, что вся внѣ круга падаетъ.

ЗАДАЧА 8.

104) Чрезъ данную точку окружности провести касательную линію.

РѢШЕНІЕ.

Пусть данная точка окружности будетъ A , а C центръ даннаго круга, изъ C чрезъ точку A проведемъ прямую линію CE , потомъ чрезъ точку A къ линіи CE проведемъ перпендикулярную линію FG , копорая будетъ касательная.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Понеже линія касательная должна падать вся внѣ круга, то должно доказать,

казати , что всякая точка линии FG , ежели она касательная , кромѣ точки A падаетъ внѣ круга ; и для того на линіи FG возми по произволію точку F , и къ ней изъ центра проведи линію CF , которая для того , что противоположныи углу прямому будетъ больше , нежели CA (§ 83) , и больше , нежели CH , следовательно точка F падаетъ внѣ круга , такимъ образомъ можно доказать о всякой точкѣ кромѣ A . Следовательно FG будетъ касательная линія.

Слѣдствіе.

105) И такъ прямая линія не можетъ больше , какъ въ одной точкѣ до круга касаться.

ТЕОРЕМА 16.

106) Ежели линія прямая касается круга , и къ точкѣ прикосновенія изъ центра круга проведется радиусъ , то онъ будетъ съ касательною линіею составлять уголъ прямой , и ежели изъ центра къ касательной линіи проведется

педется перпендикулярная, то она упадетъ въ точку прикосновения.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

1) Пусть будетъ касательная Fig. линия FG , проведемъ къ точкѣ A , гдѣ ^{42.} она до круга касается, линію CA . Если она не будетъ перпендикулярна, то будетъ другая какая нисудь, наприимѣръ CF , и будетъ CFA уголъ прямой, и CA больше, нежели CF . Слѣдовательно F упадетъ внутрь круга, что будетъ противно опредѣленію. Тоже можно доказать о всякой другой линіи кромѣ CA . Слѣдовательно CA будетъ перпендикулярна.

2) Если перпендикулярная линіа изъ центра къ касательной проведенная упадетъ не въ точку прикосновения, но въ другую F , то когда проведемъ линію CF , то она будетъ перпендикулярна, чего быть не можетъ.

ЗАДАЧА 9.

107) Въ данномъ треугольникѣ описать кругъ, котораго бы окружность

ность касалась до точек трех сторон треугольника.

РѢШЕНІЕ.

Fig. Пусть будетъ треугольникъ ABC ,
 43. возьми которой нибудь уголъ, напри-
 мѣръ ABC , и раздѣли его линіею AD
 на двѣ равныя части, площадь займай
 и съ другимъ BAC , потомъ изъ точки
 F , гдѣ линіи AD и BC себя пересѣка-
 ютъ, и которая будетъ искомымъ
 центрѣмъ, опусти къ бокамъ треуголь-
 ника перпендикулярныя линіи FG , FI ,
 FN , кругъ описанной изъ точки F про-
 идетъ чрезъ точки G , I и N .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Понеже въ треугольникахъ BGF и
 ENF уголъ $GBF =$ углу FEI лиція BF
 обоимъ треугольникамъ общая, и
 углы BGF и ENF суть прямыя, пре-
 угольникъ BGF будетъ равенъ пре-
 угольнику ENI (§ 45), и бокъ $GF =$
 FI . Подобнымъ образомъ докажемъ,
 что и $GI = GF$; слѣдовательно кругъ
 изъ точки F описанной пройдетъ чрезъ
 точки G , I , N .

ТЕОРЕМЪ

ТЕОРЕМА 17.

108) Въ томъ же или разныхъ кругахъ уголъ у центра находящейся, есть вдвое больше угла при окружности находящагося и на той же дугѣ стоящаго.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Три случая быть могутъ, или центръ круга упадетъ на бокъ угла при окружности, или внѣ, или внутрь онаго.

1) Пусть центръ круга С упадетъ на бокъ AD угла у окружности, и какъ уголъ у центра ACB, такъ и уголъ у окружности ADB споятъ на той же дугѣ АВ. Проведи линію DB и будетъ $ACB = ADB + CBD$ (§ 67). Но уголъ $CDB =$ углу CBD (§ 43). Следовательно $ACB = ADB$. Fig. 44.

2) Если центръ упадетъ внутри угла у окружности ADB находящагося, проведи чрезъ D и С линію DE, и будетъ $ACE = ADE$ и $ECB = EDB$ (§ 67, 43). Следовательно $ACE + ECB = ADE + EDB = ADB$. Fig. 45.

Fig 3) Если центръ С будетъ въ
 46 угла ADB , то чрезъ D и C проведемъ ли-
 нию ED , точки D и B соединимъ лини-
 ею DB (§ 3) и будетъ уголъ $ACE = CAD$
 + $ADC = EAD$, и уголъ $ECB = EDB +$
 $CBD = EDB$ (§ 6-й) Следовательно
 $ECB - ECA = ACB = EDB - EDA = ADB$.

Слѣдствіе 1.

109) Если дуга AB возьмется за
 мѣру угла ACB , какъ и обыкновенно бы-
 ваетъ, то мѣра угла при окружности на-
 ходящегося будетъ половина дуги, на ко-
 торой стоитъ.

Слѣдствіе 2.

110) Углы при окружности, въ томъ
 же или равныхъ кругахъ на разныхъ дугахъ
 стоящие, суть равны между собою.

Слѣдствіе 3.

111) Уголъ, стоящей на полуокружно-
 сти есть прямой уголъ; стоящей на дугѣ, ко-
 торая больше полуокружности, будетъ тупой,
 а уголъ стоящей на дугѣ, которая меньше
 полуокружности будетъ, острый.

Слѣд-

Слѣдствіе 4.

112) Если прямая линия АВ касается круга, то угол ABD у окружности находящейся, будетъ сносъ на дугѣ BD, следовательно мѣра его будетъ половина дуги BD.

ТЕОРЕМА 18.

113) Если двѣ кругѣ двѣ линии AD и CB взаимно себя пересѣкутъ, но не въ центръ, то мѣра угловъ AEB + CED = мѣра сумм дугъ AFB + CGD, на которыхъ оные углы стоятъ.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Точки A и C соедини линеею AC, B и D линеею BD, такимъ образомъ будетъ CED = CBD + ADB. Но мѣра угла CBD = мѣра угла CGD, и мѣра угла ADB = мѣра угла AFB. Следовательно мѣра угла CED = мѣра угла CGD + мѣра угла AFB, и мѣра CED = мѣра угла CGD + мѣра угла AFB.

Слѣдствіе.

114) Если двѣ линии AC и BD продолженные пересѣкутъ себя взаимно въ кругу.

круга въ точкѣ Е, то угла АЕВ мѣра бу-
детъ $\frac{1}{2}\angle AGB - \frac{1}{2}\angle CFD$, потому что $\angle ACB$
 $= \angle AEB + \angle CBD$ и $\angle AEB = \angle ACB - \angle CBD$.

ЗАДАЧА 10.

115) Къ данному положенге мѣ
кругу чрезъ данную точку инѣ кру-
га провести касательную линию.

РѢШЕНІЕ.

Fig. 50. Пусть будетъ данной кругъ DCE,
и точка А, которую съ центромъ
круга А соедини прямою линеею АВ,
и около ея опиши кругъ CBD, кото-
рой прежней прорѣжетъ въ двухъ точ-
кахъ С и D. Линей СВ и DB будутъ
касательныя линей.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Проведи радіусы АС и АД, та-
образомъ произишутъ углы АСВ и
ADB пряме (§ 111). Следовательно
линей СВ будетъ касательная въ точ-
кѣ С, а линей DB касательная въ точ-
кѣ D (§ 106).

С л ѣ д с т в і е.

116) Слѣдовательно изъ данной точки къ кругу двѣ касательныя линии провести быти могутъ.

З А Д А Ч А 11.

117) На концѣ данной линии положить перпендикулярную линию.

р ѣ ш е н і е.

Пусть данная линия будетъ АВ, Fig. и точка, изъ которой надлежитъ воз- 51.
высить перпендикулярную линию, А; возми по произволению надъ линеею точку С, и изъ нее чрезъ А опиши кругъ, который пересѣчетъ линию въ точкѣ D, чрезъ D и С проводи прямую линию DE, линия соединяющая точки А и E будетъ искомая перпендикулярная.

Д О К А З А Т Е Л Ъ С Т В О.

Уголъ ЕАВ стоить на полуокружности, слѣдовательно линия ЕА къ АВ будетъ перпендикулярна (§ 111).
ТЕОРЕ-

ТЕОРЕМА 19.

118) Въ чепероугольникѣ въ кругѣ нарисованномъ, сумма угловъ есть равна ~~двумъ~~ прямымъ.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Fig. 52. Пусть въ кругѣ ABCD начерченъ буденъ чепероугольникъ ABCD, и буденъ мѣра угла ABC = ; дуги ADC, мѣра угла ADC = ; дуги ABC (§ 109). Но ADC + ABC составяяють цѣлую окружность. Слѣдовательно мѣра угловъ ABC + ADC буденъ равна половинѣ окружности. Тоже докажетсѣ и подобнымъ образомъ объ углахъ A и C. Слѣдовательно сумма угловъ равна ~~двумъ~~ прямымъ.

ТЕОРЕМА 20.

119) Около всякой фигуры и по всякой фигурѣ регулярной кругъ описать можно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Fig. 53. 1) Пусть данная фигура регулярная буденъ пятиугольникъ ABCDE, кош-

которой нибудь уголъ сего полигона раздѣли на двѣ равныя части, напр: $\angle ABC$, тожъ здѣлай и съ другимъ къ нему ближайшимъ $\angle BCD$, и будетъ $\angle ABF = \angle FBC = \angle FCB$, и $FB = FC$. Слѣдовательно изъ точки F , гдѣ лини BF и CF себя пересѣкаютъ, чрезъ B и C можно кругъ описать. Раздѣли потѣмъ и уголъ $\angle CED$ на двѣ равныя части, то будетъ $\angle FDC = \angle FCD$, слѣдовательно $FD = FC$, и всѣ три лини BF одной точкѣ себя пересѣчь долины. Такимъ ^{нѣм.} образъ мѣ доказывается, что всѣ лини FB , FC , FD и проч: будуще между собою равны, и пересѣкутъ себя въ одной точкѣ F , изъ которой по точкамъ A , B , C , D , E кругъ описать можно.

2) Изъ точки F къ бѣкамъ фигуры проведи перпендикулярныя лини Ff , Fg , Fh и проч: или углы у точки F раздѣли всякой на двѣ равныя части, лини Ff , Fg , Fh для угловъ f , g , h прямыхъ, и какъ углы $\angle FBf$, $\angle FBg$, $\angle FCg$, $\angle FCh$, такъ и лини FB , FC , FD равныхъ между собою, будуще такъ же равны. Слѣдовательно изъ точки F по точкамъ

точкамъ f, g, h въ фигурѣ регулярной кругъ описать можно.

Примѣчаніе.

120) Изъ сего видно, какъ во всякой фигурѣ регулярной, и около фигуры кругъ описать можно.

Слѣдствіе 1.

54 121) Въ фигурѣ регулярной уголъ у точки D и лежащей на ней, если $\angle R = 360^\circ$ раздѣлишь на число бѣковъ, если число бѣковъ будетъ $= N$, искомый уголъ будетъ $= \frac{\angle R}{N}$, а уголъ полигона будетъ $= \frac{N-2}{N} \angle R$, какъ выше сего показано.

Слѣдствіе 2.

54 122) Если фигура регулярная будетъ шестиугольникъ, то уголъ ADB будетъ $= \frac{\angle R}{3}$, а уголъ полигона ABC $= \frac{\angle R}{3}$. Слѣдовательно уголъ DAB = ABD = ABC $= \frac{\angle R}{3}$, и треугольникъ ABD будетъ равносторонней, по сему бѣкъ шестиугольника регулярнаго равенъ будетъ радиусу того круга, въ которомъ написанъ быть долженъ.

Примѣ-


Примѣчаніе.

123) Уже выше говорено, что въ помѣ же или равныхъ кругахъ, равнымъ дугамъ равныя и хорды соотвѣтствуютъ, и углы на равныхъ дугахъ стоящіе суть равны между собою, слѣдовательно, когда требуется въ кругѣ написать фигуру регулярную, то надлежитъ окружность раздѣлить на столько равныхъ частей, сколько боковъ фигура имѣть должна. Но не имѣемъ еще способа Геометрическаго, то есть помощью линейки и циркуля окружность круга дѣлить на столько равныхъ частей, на сколько кто желаетъ, и по сему не всякой полигонъ въ данномъ кругѣ описать можно. И такъ другаго способа окружность дѣлить на равныя части не остается, кромѣ *Механическаго*, который состоитъ въ слѣдующемъ. Раздѣли $R=360^\circ$ на столько частей, сколько полигонъ боковъ имѣть долженъ, и найдемъ уголъ у центра, который вымѣривъ помощью инструмента *Транспортира* называемаго поставимъ у центра данного круга, и бока его продолжимъ, пока окружность не пересѣкутъ: Содержащаяся между боками часть окружности будетъ искомая дуга.

124) Здѣсь примѣчать надлежитъ, что когда въ кругѣ уже написанъ многоугольникъ N боковъ, то можно написать

многоугольникъ

многоугольникъ, въ которомъ бы число боковъ было $2N$. Въ такомъ случаѣ ничего больше не требуется, какъ всякой бокъ написаннаго полигона раздѣлить на двѣ равныя части, и чрезъ точки дѣления изъ центра круга къ окружности провести прямыя линии, тогда окружность раздѣлена будетъ на $2N$ числомъ равныхъ частей, и полигонъ описать можно будетъ. Изъ сего всякъ понять можетъ, коимъ образомъ когда въ кругѣ написанъ полигонъ, котораго число боковъ есть $2N$, написать можно въ томъ же кругѣ многоугольникъ N боковъ.

125) Какъ въ кругѣ не всякой полигонъ Геометрическимъ образомъ написать, такъ и на данной линіи АВ, не всякой полигонъ начертить можно. Механическимъ образомъ на данной линіи, полигонъ регулярной описывается слѣдующимъ образомъ: Пусть данная линія будетъ АВ, съини уголъ полигона, и по концамъ линіи АВ поставъ помощью Транспортира по углу, изъ которыхъ бы всякой былъ . Изъ точки С гдѣ сѣкѣ взаимно пересѣкутъ линіи АС и СВ, или кругъ проходящей по точкамъ А и В. По окружности сего круга секъ АВ столько разъ умѣстится, сколько N единицъ въ себѣ содержитъ.

126) Изъ того, что здѣсь о фигурахъ въ кругѣ и около его написанныхъ гово-

рено,

реко, заключить не трудно, что всякой фигуры въ кругѣ написанной окружность меньше, а около круга описанной больше, нежели окружность самого круга, и чѣмъ больше фигуры какъ въ кругѣ, такъ и около онаго описанныя будутъ имѣть боковъ, тѣмъ меньше будетъ разность между окружностями фигуръ и окружностью круга, такъ что ежели въ кругѣ написанъ будетъ какой нибудь полигонъ, и около его другой равное число боковъ съ прежнимъ имѣющей, то удвоеніемъ числа боковъ въ обѣихъ полигонахъ можно будетъ дойти до того, что разность между окружностями будетъ нечувствительна, и что окружности ихъ съ окружностью круга напоследокъ сходятся, и по сему кругъ называется полигонъ изъ безчисленнаго множества боковъ состоящей.

127) На семъ основана квадратура Архимедова, которой прежде всѣхъ содержаніе окружности къ диаметру круга нашелъ 22 : 7. Сие содержаніе опредѣлилъ, описавъ какъ около, такъ и внутрь круга многоугольникъ регулярной о шести бокахъ, и удвоеніе боковъ какъ внѣшняго, такъ внутренняго многоугольника продолжалъ до тѣхъ поръ, пока оба политыя не имѣли по 26 боковъ. Ежели бы подобное удвоеніе продолжено было далѣе, то въ аккураціи большее содержаніе поперешника къ окружности найде-

то было, что и учинено отъ нѣкоторыхъ. Но о семъ пространно говорить еще не время.

ГЛАВА 3.

О линияхъ пропорциональныхъ и подобии фигуръ.

ТЕОРЕМА 21.

Fig. 128) Во всякомъ параллелограммѣ бока противоположаще суть равны между собою, и диагональ параллелограммѣ дѣлитъ на двѣ равныя части.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Пусть будетъ параллелограммъ $ABCD$, проводи въ немъ диагональную линию AD , которая раздѣлитъ параллелограммъ на два треугольника. Поцѣже какъ бока AB и CD , такъ AC и DB суть параллельны между собою; по будетъ уголъ $BAD =$ углу ADC , и $CAD = ADB$. Сверхъ сего бокъ AD общимъ треугольникамъ общей: слѣдовательно треугольникъ CAD будетъ ра-

равенъ преугольнику ABD (§ 45), боки $AB=CD$ и $CA=DB$.

ТВОРЕМА 22.

129) Если изъ двухъ линий Fig. AB и CD какое нибудь положе- 57.
не на данной плоскости имѣющихъ,
одна, наприимѣръ AB раздѣлена оу-
детъ на нѣсколько равныхъ частей
между собою AE , EF , FG , и
изъ точекъ A , E , F , G , пропе-
дуться параллельныя лини AC , EH , FI ,
 GK , пересѣкающія линию CD въ то-
кахъ C , H , I , K , то и части ли-
ней CD содержащіяся между парал-
лельными линиями будутъ равны
между собою.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Изъ точекъ C , H , I проведи ли-
ней AB параллельныя лини CL , HM ,
 IN ; то произойдутъ параллелограммы
 AL , EM , FN , въ которыхъ будетъ $AE=$
 LC , $HM=EF$, $IN=FG$ (128). Поне-
же лини AC , EH , FI суть парал-
лельны между собою; углы E , F , G
будутъ между собою равны, и равны
угламъ

угламъ $\angle CHN$, $\angle HMI$, $\angle INK$ (§ 57. 55). Для подобной причины углы $\angle CHL$, $\angle HIM$ и $\angle IKN$ суть между собою равны: следовательно и треугольники $\triangle CHN$, $\triangle HMI$, $\triangle INK$ будутъ равны между собою, и $CH=HI=IK$. Подобнымъ образомъ доказано будетъ и о прочихъ.

Слѣдствіе.

Fig. 58. 130) Если линіи AB и CD такоѣ будутъ имѣть положеніе, чтобъ точки A и C слились въ одно мѣсто; то и въ такомъ случаѣ какъ части линіи AB , такъ и части линіи CD будутъ равны между собою.

ЗАДАЧА 12.

131) Данную линію раздѣлитъ на столько равныхъ частей, на сколько кто желаетъ.

рѣшеніе.

Fig. 58. Пусть дана будетъ линія CD , которую должно раздѣлять на N равныхъ частей. Надлежитъ изъ точки C подъ какимъ нибудь угломъ, провести линію CT , и на ней; начина

ная опѣ С , столько опѣтъ равныхъ часней , сколько число N содержитъ въ себѣ единицъ. Концу данной линии D , и послѣднюю почку линии AT соедини прямою линеею BD , потомъ изъ почекъ замѣченныхъ G , F , E проведи линей BD параллельныя. Такимъ образомъ линия CD раздѣлена будетъ на столько равныхъ часней , сколько въ N единицъ содержится.

ТЕОРЕМА 23.

132) Если двѣ линии EF и GH какое нибудь положеніе имѣющія пересѣчены будутъ тремя параллельными линиями AB , CD , и IK ; то будетъ $EF : EL = GH : GM$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Раздѣли линеею EF на сколько ни- Fig. 12
будь равныхъ часней , и чрезъ почки , въ которыхъ она раздѣлена будетъ , линеемъ AB , CD и IK проведи параллельныя ; то и линия GH раздѣлена будетъ на столькожъ равныхъ часней , и на сколько часней линия EF раздѣлена будетъ по линеею CD , на столькожъ и линия GH раздѣлится по
о 3 линеею

линею CD . Изъ сего слѣдуетъ , что ежели линия CD упадетъ на линию LM , то будетъ $EF:EL=GH:GM$ (§ 75 Арием.).

Fig. Но ежели CD не упадетъ ни на
60. одну линию дѣлящую ; то дѣли линию LI далѣе на равныя части , и проводи линиямъ LM и ln параллельныя. Такимъ образомъ продолжая дѣленіе , на послѣдокъ линия CD должна будетъ упасть на одну изъ линий параллельно между линиями LM и ln проведенныхъ , и столько будетъ въ md частей , изъ какихъ Mm состоитъ , сколько находится въ lc ; и въ какихъ LI состоитъ . Слѣдовательно и въ семъ случаѣ будетъ $Ec:EF=Gd:GH$. (§ 75 Арием.).

Слѣдствіе 1.

Fig. 133) Подобнымъ образомъ будетъ
59. $LF:FF=MH:GH$, или $EL:GM=EF:GH$ и $LF:MH=EF:GH$ (§ 84 Арием.). Слѣдовательно будетъ $EL:GM=LF:MH$, и $EL:LF=GM:MH$. По сему EF и GH и всѣ части оныхъ , содержащіяся между параллельными линиями , будутъ пропорціональны между собою.

Слѣд-

Слѣдствіе 2.

134) Если точки E и G упадутъ Fig. одна на другую, такъ чтобъ произошелъ бѣ. треугольникъ ABC, и проведена будетъ линия DE параллельная линіи BC, пересѣкающая бока треугольника; то будетъ $AD:AB = AE:AC$ и $BD:AB = EC:AC$, и по томъ $AD:BD = AE:EC$.

Слѣдствіе 3.

135) Если будетъ $AD:AB = AE:AC$, и проведутся линіи BC и DE, то онѣ будутъ между собою параллельны, потому что если бы другая какая нибудь, какъ FE, была параллельна линіи BC, то бы было $AF:AB = AE:AC$ противъ положенія.

ЗАДАЧА 13.

136) Даннымъ тремъ линіямъ найти четвертую пропорциональную.

РѢШЕНІЕ.

Пусть данныя линіи будутъ перъ- Fig. вая a, вторая b, третья c. Подъ ка- 62. кимъ нибудь угломъ соедини двѣ линіи AM и AN. На которую нибудь изъ нихъ, напр: AN, перенеси линію a, на

на АМ линею b , попомъ на ВN линею c , такъ чпобъ было $AB=a$, $AC=b$, $BD=c$. Чрезъ точку D линею ED : линея CE будетъ четвертая пропорциональная.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Понеже линея ED параллельна линею BC ; то будетъ $AB:AC=BD:CE$, то естъ $a:b=c:CE$ (§ 134) и $CE=\frac{bc}{a}$.

Слѣдствіе 1.

137) Если будетъ $AC=BD$, тогда CE будетъ двумъ линеямъ третья пропорциональная, $CE=\frac{bb}{a}$.

Слѣдствіе 2.

138) Подобнымъ образомъ къ данной линею найдется другая, которая бы была въ содержаніи сложенномъ изъ двухъ, трехъ, четырехъ и болѣе содержаніи. Пусть будетъ данная линея L, и данныя содержанія $a:b$, $c:d$, $e:f$, $g:h$; зѣлай по § 136.

$$a:b=L:M$$

$$c:d=M:N$$

$$e:f=N:O$$

то будетъ содержаніе линіи L къ линіи N сложенное изъ содержаній $a:b$ и $c:d$, и содержаніе линіи L къ линіи O , сложенное изъ содержаній $a:b$, $c:d$, $e:f$. Тоже должно разумѣть и о большемъ числѣ содержаній.

ЗАДАЧА 14.

139) Данную линію AB раздѣ- Fig.
литъ въ такомъ содержаніи, какъбз.
раздѣлена другая CD въ точкахъ
 E и F .

РѢШЕНІЕ.

Возми по произволѣнїю какой нибудь уголъ, и на продолженные его бока перенеси линіи AB и CD : концы линіи B и D соедини прямою линіею, и по точкамъ E и F проводи параллельныя линіи Ee и Ff линіи BD ; линіи AB такъ раздѣлена будетъ, какъ и линіи BD .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Справедливостъ сего рѣшенія явствуетъ изъ § 134.

ОПРЕДѢЛЕНІЕ 21.

140) *фигуры* плоскія прямолинейныя *подобными* [similes] называющіяся, ежели всѣ углы одной фигуры равны будупѣ угламъ другой, и бока равные углы заключающіе будупѣ пропорціональны. Такъ напримѣръ, ежели въ фигурахъ ABCDE и abcde будетъ $A=a, B=b, C=c, D=d, E=e$, и $AB:ab=BC:bc, BC:bc=CD:cd$ и проч: то есѣ ежели бы было $ab=\frac{1}{3}AB, bc=\frac{1}{3}BC$, и пожѣ бы. свойство и прочіе бока во одинакомъ положеніи находящіяся имѣли, то фигуры ABCDE и abcde будупѣ подобны.

Слѣдствіе.

141) Слѣдовательно всѣ фигуры регулярныя, которыя одинакое число боковъ имѣюпѣ, суть подобны между собою, то есѣ всѣ треугольники равносторонніе, всѣ квадраты, всѣ пятиугольники регулярные. По сему и всѣ круги будупѣ подобны между собою.

ТЕОРЕМА 24.

142) *Ежели двѣ* *треугольникѣ* ABC *два* угла *будутъ* равны *угламъ* *треу-*

треугольника abc , то есть $A=a$, $B=b$; то треугольники будут подобны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Тотчасъ видно, что и уголъ C Fig. 65.
равенъ будетъ углу c (§ 70). Изъ
точки A на линіи AB здѣлай $AE=a$,
и чрезъ точку E проводи ED парал-
лельную линіи CB то будетъ уголъ
 E равенъ углу $B=b$. Слѣдовательно
треугольникъ AED будетъ равенъ тре-
угольнику abc (§ 45). А понеже $AB:$
 $AC=AE:AD$ (§ 134), и $AE=a$, $AD=c$;
то будетъ $AB:AC=a:c$. То же
можно доказать и о прочихъ бокахъ
треугольниковъ, что углы одного
треугольника равны угламъ другаго, и
бока равные углы заключающіе сущь
пропорціональны. Слѣдовательно тре-
угольники ABC и abc сущь подобны
между собою.

Слѣдствіе.

143) Если въ треугольникѣ ко-
торому нибудь боку проведемъ параллель-
ная линія; то опдѣлится треугольникъ цѣ-
лому подобный, и будетъ $AC:CB=AD:DE$.

ТЕОРЕ-

ТЕОРЕМА 25.

Fig 144) Если въ треугольникахъ $\triangle ABC$ и $\triangle abc$ уголъ который нибудь, напримеръ A , равенъ будетъ углу a , и бока равные углы заключающіе будутъ пропорциональны между собою; то треугольники будутъ подобны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Возьми $AE = ab$, и чрезъ точку E проводи линію DE параллельную линіи BC ; то будучи треугольники ABC и AED подобны (§ 143), $AB : AC = AE : AD$, или $AB \cdot AC = ab : AD$. Но по положенію $AB : AC = ab : ac$; слѣдовательно будучи $ac = AD$, и треугольникъ ADE равенъ треугольнику abc (§ 42). Изъ сего явствуеши, что треугольники ABC и abc будутъ подобны между собою.

ТЕОРЕМА 26.

145) Если бока треугольника ABC пропорциональны будутъ бокамъ треугольника abc , одинакое въ разсужденіи угловъ положеніе имѣю щимъ;

щими; то треугольники будут подобны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Ежели будетъ $AB:AC=ab:ac$, возьми $AE=ab$ и $AD=ac$; то будетъ $AB:AC=AE:AD$. Изъ сего слѣдуетъ, что линия ED параллельна будетъ линіи BC (§ 13), и $AB:CB=AE:DE$ (§ 14), или $AB:CB=ab:DE$. Но положению $AB:CB=ab:cb$; слѣдовательно $cb=DE$, и треугольникъ AEB равенъ треугольнику ADE ; и подобенъ треугольнику ACB .

ТЕОРЕМА 27.

146) Треугольники прямоугольные, въ которыхъ бока угла которой нѣбудь изъ острыхъ заключающе пропорциональны, суть подобны между собою.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Пусть въ треугольникахъ прямо-угольных ABC и abc будетъ $AC:AB=ac:ab$. Возьми $AE=ac$, и изъ точки E проведи перпендикулярную ED къ линіи AB , которая будетъ параллельна линіи BC . Fig. 66.

линей СВ, и треугольник АСВ подобен треугольнику АЕВ (§ 143). Из сего слѣдуетъ $АС: АВ = АЕ: АД$, или $АС: АВ = ас: аВ$. Но по положению $АС: АВ = ас: аВ$; слѣдовательно $АД = аВ$, и треугольникъ асв равенъ треугольнику АЕВ, и подобенъ треугольнику АСВ.

Примѣчаніе.

147) Изъ сихъ теоремъ вообще видно, что треугольники подобны бывающъ, когда ихъ углы равны будутъ, а бока равные углы заключающіе пропорциональны, и притомъ, что дано быть должно, чтобъ данному треугольнику подобной написать можно было.

ТЕОРЕМА 28.

Fig. 148) Если фигура АВСДЕ изъ
67. угла котораго исхъдъ, надрѣзъ
А. проведенными къ прочимъ угламъ
прямыми линиями раздѣлится на
треугольники, и тожъ учинено бу-
детъ въ подобной фигурѣ abcde изъ
угла а одинакое положеніе въ рассу-
жденіи споей фигуры и мѣющаго съ
угломъ А въ фигурѣ АВСДЕ; то фи-
гура abcde раздѣлится на треуголь-
ники

ники подобные треугольникамъ фигуры $ABCDE$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Изъ угловъ A и a къ угламъ D и C , d и c проводи прямыя линии. Понеже фигуры $ABCDE$ и $abcde$ суть подобны между собою; то будешь уголъ $E =$ углу e и $AE: a = ED: ed$; треугольникъ AED будетъ подобенъ треугольнику aed (§ 144), и $ED: ed = AD: ad$. Но $ED: ed = DC: dc$; следовательно и $AD: ad = DC: dc$. А понеже уголъ ADE равенъ углу ade , уголъ EDC равенъ углу edc ; то и уголъ ADC будетъ равенъ углу adc (§ 40 Ариѳм.). Следовательно треугольникъ ADC подобенъ треугольнику adc . Доказательство продолжается, ежели бы еще будетъ треугольниковъ, такимъ же образомъ. На послѣдокъ и треугольникъ ABC будетъ подобенъ треугольнику abc .

Примѣчаніе.

149) Всякая фигура диагональными линиями раздѣлена быть можетъ на треугольники, и по сему на данной линіи ab фигуръ $ABCDE$ подобную описать можно,

СОВОУ

совокупляя треугольники подобные треугольникамъ фигуры $ABCDE$. Но понеже данная фигура различными образы на треугольни-
ки раздѣлена быть можетъ, и данныя вещи въ фигурѣ $ABCDE$ могутъ быть различны, разные изъ того производя способы дан-
ной фигурѣ описать подобную, которые сколь-
ко изчислять бесполезно, сиполько напротивъ
того, ежели два или три показаны будутъ,
изъ сихъ оснований легко рѣшишь можно.
(случай) Пусть въ данной фигурѣ $ABCDE$
въ бока и диагональны даны будутъ, и
положимъ, что данная фигура $abcde$ уже на-
писана; то для подобія ихъ, ежели изъ
точекъ ихъ A и a проведены будутъ диаго-
нальныя лини къ угламъ фигурѣ, треу-
гольники, на которые раздѣляются, должны
быть подобны, и для того изъ данныхъ бо-
ковъ фигуры $ABCDE$ съ ея диагональными, и
боку ab прочие бока искомой фигуры най-
дутся слѣдующимъ образомъ:

$$\begin{aligned} AB : ab &= CB : cb ; cb = \frac{CB \cdot ab}{AB} \\ AB : ab &= CA : ca ; ca = \frac{CA \cdot ab}{AB} \\ AB : ab &= CD : cd ; cd = \frac{CD \cdot ab}{AB} \\ AB : ab &= AD : ad ; ad = \frac{AD \cdot ab}{AB} \\ AB : ab &= ED : ed ; ed = \frac{ED \cdot ab}{AB} \\ AB : ab &= AE : ae ; ae = \frac{AE \cdot ab}{AB} \end{aligned}$$

Такимъ

Такимъ образомъ нашедъ всѣ бока и диагональныя искомой фигуры , ничего больше не требуется , какъ изъ данныхъ трехъ боковъ дѣлать треугольники.

2 Случай) ежели всѣ бока фигуры $ABCDE$, и углы ея даны будутъ , то на линіѣ ab подобная фигура опишется слѣдующимъ образомъ. Понеже фигуры должны быть подобны, то должно быть.

$$AB : ab = CB : cb ; cb = \frac{CB \cdot ab}{AB} ;$$

къ линіѣ ab подъ угломъ $abc = ABC$ надложитъ поставивъ $bc = \frac{CB \cdot ab}{AB}$

$$AB : ab = DC : dc ; dc = \frac{DC \cdot ab}{AB} ;$$

къ линіѣ cb подъ угломъ $dcb = DCB$ поставь линію $dc = \frac{DC \cdot ab}{AB}$

$$AB : ab = ED : ed ; ed = \frac{ED \cdot ab}{AB} ;$$

къ линіѣ ed подъ угломъ $edc = EDC$ поставь линію $ed = \frac{ED \cdot ab}{AB}$. Напоследокъ концы a и e соедини линіею ea , фигура $abcde$ будетъ подобна фигурѣ $ABCDE$.

3 Случай) Ежели изъ точки G внѣ Fig или внутрѣ фигуры взятой проведенныя ли- 68., ни къ угламъ фигуры даны будутъ , такъ бр. какъ и углы около точки G находящиеся , и дана будетъ линія въ искомой фигурѣ ag ,

которая таксежъ положеніе въ своей фигурѣ имѣть должна, какое AG имѣетъ въ фигурѣ $ABCDEF$, или содержаніе оныхъ $AG: ag = N: n$, то подобная фигура опишется, какъ слѣдуетъ. Около точки g заѣмай уголъ $fga = FGA$, $agb = AGB$; $bgc = BGC$; $cgd = CGD$; $egd = EGD$; $fge = FGE$, отъ линей изъ точки g подѣ помянутыми углами проведенныхъ отрѣжъ $bg = \frac{n \cdot BG}{N}$; $gc = \frac{n \cdot GC}{N}$; $gd = \frac{n \cdot GD}{N}$; $ge = \frac{n \cdot GE}{N}$; $gf = \frac{n \cdot GF}{N}$. Потѣмъ точки a, b, c, d, e, f соедини надлежащимъ образомъ, фигура $abcdef$ будетъ подобна фигурѣ $ABCDEF$.

ТЕОРЕМА 29.

150) Подобныхъ фигуръ окружности, или части ихъ, одинакое въ разсужденіи угловъ положеніе имѣющія, содержатся между собою такъ, какъ и бока ихъ между равными углами находящіяся.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Fig. 70. Пусть подобныя фигуры будутъ $ABCD$ и $abcd$. Понеже содержаніе боковъ въ подобныхъ фигурахъ между равными углами положенныхъ есть одинако, пусть оно будетъ $N:n$, и произойдетъ

$AB:$

$$AB: ab = N: n$$

$$LC: bc = N: n$$

$$CD: cd = N: n$$

$$AD: ad = N: n; \text{ слѣдовательно}$$

$$AB+BC: ab+bc = N: n$$

$$AB+BC+CD: ab+bc+cd = N: n$$

$$AB+BC+CD+AD: ab+bc+cd+ad = N: n \quad (\S$$

(85 Арием.).

Слѣдствіе 1.

151) Пусть будутъ два круга ABD и abd Fig. 71. радиусъ круга $ABD = R$, а круга $abd = r$. Опиши во всякомъ по полигону регулярному, безчисленное множество боковъ имѣющему, и какъ въ одномъ, такъ и въ другомъ пусть будетъ число боковъ $= M$, боковъ перваго $AB = N$, и боковъ втораго $ab = n$. Ежели изъ центровъ оныхъ къ концамъ боковъ проведены будутъ линіи, то будутъ углы при центрахъ, такъ какъ и углы полигоновъ, равны между собою, и $MN: Mn = N: n$ (§ 141 . 150) Для подобія треугольниковъ ABC и abc , $N: n = R: r$, слѣдовательно $MN: Mn = R: r$. Но MN и Mn означаютъ окружности круговъ, слѣдовательно окружности круговъ содержатся между собою такъ, какъ радиусы, или діаметры поперешники.

Слѣдствіе 2.

152) Если будетъ уголъ $DCE =$ углу dce , то будетъ дуга DE въ такомъ содержаніи къ дугѣ ed , какъ содержитсяъ радиусъ CD къ радиусу cd .

Примѣчаніе.

153) Понеже всѣ круги суть подобны между собою, и окружности ихъ содержатся между собою такъ, какъ ихъ поперешники, слѣдовательно если содержаніе поперешника къ окружности въ одномъ будетъ извѣстно, и данъ будетъ поперешникъ другого круга, то окружность его по тройному правилу найти можно. Пусть содержаніе поперешника къ окружности будетъ $\delta : \pi$, и данной діаметръ d ; окружность его будетъ $= \frac{\pi d}{\delta}$: а если окружность p , то поперешникъ будетъ $= \frac{\delta p}{\pi} = d$.

ТЕОРЕМА 30.

Fig. 72. 154) Углы BAC и EAD содержатся между собою, такъ какъ дуги изъ пересѣкъ ихъ между боками одинаковы раздѣленіемъ циркуля описаннымъ.

ДОКА-

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Пусть будут описанныя дуги BE и ED , надлежит доказать, что $\angle CAD : \angle BAC = ED : BE$. Раздели дугу BD на несколько равных частей, и к точкам, в которых она разделена будет, из A проводи прямые линии, которыми угол на столько равных частей разделится, на сколько дуга BD разделена будет (§ 92). Из линий, углов BAD делящих, или упадет которая нибудь на линию AC , или ни одна не упадет. Если упадет, то столько частей дуги BD содержится будет в дуге BE , сколько частей угла BAD содержится в угле BAC . Из сего следует, что будет

$\angle BAD : \angle BAC = \angle BED : \angle BEC$ (§ 8 Арием.) и $\angle BAD - \angle BAC : \angle BAC = \angle BED - \angle BEC : \angle BEC$, (§ 83 Арием.) т. е. $\angle CAD : \angle BAC = ED : BE$

А хотя линия AC и не упадет ни на одну из тех линий, которыми угол BAD разделяют на равныя части, однакож само собою видно, что не может ни больше, ни меньше в дуге BE быть таких частей, на какія BE разделена, как в угле BAC частей

угла BAD слѣдовательно и въ семь случаѣ помянутая пропорція будетъ имѣть мѣсто.

Слѣдствіе.

155) И такъ всякой уголъ къ прямому содержится, такъ какъ дуга, между боками его описанная, къ четверти круга, тѣмъ же разтвореніемъ описанной, а къ двумъ прямымъ вмѣстѣ взятымъ, такъ какъ та же дуга къ половинѣ окружности. Такимъ образомъ по содержанию дуги къ полуокружности, или къ четверти окружности, всѣ углы могутъ быть извѣстны.

Fig. И понеже дуга $сн$ содержится къ своей полуокружности какъ, такъ какъ дуга $ЕМ$ къ полуокружности $АЕВ$. слѣдовательно всякая дуга между боками угла, изъ верьху его описанная, можетъ быть мѣрою угла.

Примѣчаніе.

156) Теперь видно, для чего дуга изъ верьху угла между боками описанная мѣрою его называется. Оплавши дугу най-ти можно содержание оной къ четверти или половинѣ окружности дѣленіемъ обѣихъ на равныя и маленькія частицы. - Какъ скоро содержание ихъ будетъ извѣстно, то и величина угла будетъ извѣстна. Изъ сего явствуетъ, что здѣсь мѣра не въ такомъ смыслѣ

смыслъ берется какъ обыкновенно, то есть, чтобъ мѣра нѣскольکو разъ взяшая равна, была мѣряемому количеству.

ТЕОРЕМА 31.

157) Если изъ точки A пнѣ ^{Fig 73} круга пзятой протянуты будутъ ⁷³ лини AD и AE , такъ чтобъ каждая окружность пѣ двухъ точкахъ прорѣзывала; то будетъ $AC:AB=AD:AE$. 2) Если точка A будетъ ^{Fig 74} пнутри круга и чрезъ оную пропе- ⁷⁴ дутся прямыя лини BD и CE , которыя бы окружность прорѣзывали, то будетъ также $AC:AB=AD:AE$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Проведи лини BC и DE , такимъ образомъ произойдунѣ два преугольника ABC и AED подобныя, потому что $BDE + BCE = 2R$, и $DBC + CED = 2R$ (§ 111) припомѣ $ACB + BCE = 2R$ и $DBC + ABC = 2R$ (§ 20). Изъ сего слѣдуеѣтъ, что $BDE = ACB$, и $CED = ABC$, и преугольникъ ABC подобенъ преугольнику AED (§ 142) слѣдовательно $AC:AB=AD:AE$.

2) Угол $\angle BDC$ равенъ будетъ углу $\angle CED$, потому что стоятъ на одной дугѣ, уголъ $\angle BDE$ равенъ углу $\angle BCE$ для подобной приемы; следовательно треугольникъ $\triangle ABC$ подобенъ треугольнику $\triangle AED$, и будетъ $AC:AB = AD:AE$.

Слѣдствіе 1.

Fig. 158) Если линія AD будетъ касательная, то есть когда точки B и D со-
75. лются, то будетъ $AB = AD$, и $AD:AB = AB:AE$, следовательно AB будетъ средняя пропорциональная между AC и AE .

Слѣдствіе 2.

Fig. 159) Если линія CE пересѣчетъ
76. линію BD на двѣ равныя части, то будетъ $AB = AD$, и линія $AB = AD$ будетъ средняя пропорциональная между CA и AE .

ЗАДАЧА 15.

160) Могли данныя двѣ линіи или найти среднюю пропорциональную.

РѢШЕНІЕ.

Fig. Пусть данныя линіи будутъ M
77. и N ; соедини ихъ такъ, чтобъ составляли

ляли прямую линию AC , на которой опиши полукружие, изъ точки B , гдѣ данная линіи соединяются, возвысь перпендикулярную BD , которая будетъ искомая средняя пропорціональная.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Проведи линіи AD и DC , то будетъ уголъ ADC прямой (§ 111), такъ какъ и углы ADB и BDC . Сверхъ сего треугольникамъ прямоугольнымъ ADC и ADB уголъ A общимъ общей, следовательно треугольникъ ADC подобенъ треугольнику ADB (§ 142) Для подобной причины и треугольникъ BDC подобенъ треугольнику ADC , изъ сего слѣдуетъ, что и треугольники ABD и CBD суть подобны между собою, и будетъ

$$AB : BD = BD : BC.$$

Слѣдствіе 1.

161) Понеже треугольникъ ADC подобенъ треугольникамъ BDC и ADB , то будетъ $BC : DC = DC : AC$ и $AB : AD = AD : AC$, следовательно DC будетъ средняя пропорціональная между линіями BC и AC , а

AD средняя пропорциональная между AB и AC.

Слѣдствіе 2.

162) Если въ треугольникѣ прямоугольномъ, изъ прямого угла на бокъ ему противолежащей, опустится перпендикулярная линия, то ею треугольникъ раздѣлится на два и между собою и цѣлому подобныя.

ГЛАВА 4.

О сравненіи и размѣрени фигуръ.

ТЕОРЕМА 32.

163) Паралелограммы между параллельными линиями на той же основаніи или равныхъ стояще, суть равны между собою.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Пусть будутъ паралелограммы ABCD и ABFE между параллельными линиями MN и PR на основаніи АВ стояще. Понеже линия AC = линіи BD, и AE = BF. Сверхъ сего CD = AB = EF

$\equiv EF$ (§ 128), то будетъ $CE \equiv DF$, следовательно треугольникъ $AEC \equiv$ треугольнику BDF (§ 48). Изъ равныхъ треугольниковъ ACE и BDF отними треугольникъ GDE , то остатокъ $ACGD$ будетъ равенъ остатку $BGEF$. Ко всякому изъ остатковъ придай треугольникъ AGB , то будетъ $ACGD + AGB \equiv ACDB \equiv BGEF + AGB \equiv ABFE$ (§ 40 Ариѳм.).

Слѣдствіе 1.

164) Когда цѣлыя параллелограммы равны между собою, то и половины ихъ будутъ равны, то есть треугольники ACB и AEB на одномъ или равныхъ основанияхъ и между параллельными линиями стоящіе, суть равны между собою.

Слѣдствіе 2.

165) Понеже $ACB \equiv ACDB \equiv AEB$. Fig. Возми $AB \equiv BF$, то будетъ $AEB \equiv BEF$ 79. (§ 164). Следовательно $ACDB \equiv AEF$, то есть треугольникъ которой между тѣмижъ параллельными стоитъ, и двое большее основание имѣетъ, есть равенъ параллелограмму.

Слѣд-

Слѣдствіе 3.

Fig. 166) Если между шѣмижъ параллельными линиями будетъ стоятъ много треугольниковъ, какъ въ фигурѣ изображается, то треугольникъ ABG , котораго основание равно вѣмъ основаніямъ треугольниковъ ABC , CDE , EFG вмѣстѣ взятымъ, равенъ будетъ суммѣ треугольниковъ ABC , CDE , EFG .

ОПРЕДѢЛЕНІЕ.

Fig. 167) Разстояние между параллельными линиями, называется *высота* (*Altitudo*) фигуръ между ними содержащихся. Такъ на примѣръ AM будетъ высота треугольниковъ ABC , ACG , CDE , EFG , и чепвероугольниковъ $ABCD$, $DEFG$, а *основаніе* (*Bas*) фигуры, бокъ которой нибудь сходствуюющей съ параллельною линеею.

ЗАДАЧА 16.

168) Данному параллелограмму здѣлать другой равной подѣ даннымъ угломъ.

рѣшеніе.

Fig. Пусть будетъ данной параллелограммъ $ABCD$, и уголъ, подѣ которымъ

рымъ другой равной здѣлать надлежитъ O . Продолжи основание BC и бокъ ему противоположащей AD , уголъ EFG здѣлай $\equiv O$, попомъ возми $FG \equiv BC$, изъ точки G линей FE проводи параллельную линей GH . Такимъ образомъ будешь параллелограммъ $ABCD \equiv$ паралл: $EFGH$ (§ 163).

Слѣдствіе.

169) По сему и треугольнику другой равной подѣ даннымъ угломъ написать можно. Ежели бы данной треугольникъ былъ ABC , и уголъ O , то здѣлавъ $EFG \equiv O$, и $BC \equiv FG$, надлежитъ только соединить точки E и G линей EG , и произойдетъ треугольникъ искомой EFG .

Примѣчаніе.

170) Изъ § 156 и изъ сего рѣшенія видно, какъ параллелограмму равной треугольникъ подѣ даннымъ угломъ написать можно.

ТЕОРЕМА 33.

171) Параллелограммы одинакой высоты содержатся между собою такъ какъ ихъ основанія.

ДОКА-

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Fig 82. Пусть будут параллелограммы $ABCD$ и $EFGH$ одинакой высоты, здѣлай $BL=FG$, и будетъ паралл: AL равенъ паралл: BG . Раздѣли основаніе BC на сколько нибудь равныхъ частей, то въ паралл: $ABCD$ столько содержаться будетъ равныхъ между собою параллелограммовъ, на сколько частей основаніе раздѣлено будетъ, и ежели точка L упадетъ на какую нибудь точку дѣленія, то въ параллелограммѣ AL столько будетъ равныхъ прежнимъ параллелограммовъ, на сколько частей BL раздѣлена будетъ. Слѣдовательно

$$ABCD : ABLK = BC : BL \text{ или}$$

$$ABCD : EFGH = BC : FG. (\S 83 \text{ Ариѳм.})$$

А хотя точка L и не упадетъ ни на одну точку дѣленія, однакожъ не можетъ быть, чтобъ больше или меньше частей, на сколько BC раздѣлена, содержалось въ линіи BL , какъ сколько частей параллелограмма $ABCD$ содержится въ паралл: AL . Слѣдовательно и въ семъ случаѣ будетъ

$$ABCD : EFGH = BC : FG.$$

Слѣд-

Слѣдствіе 1.

172) Если въ параллелограммахъ Fig. ABCD и GHİK основанія CD и HK будутъ 83. равны между собою. На основаніи CD здѣлай чешвер: прямоугольной ED, равной параллелограмму AD, и на основаніи HK ректангуль LK равной параллелограмму GK. Понеже бока прямоугольниковъ CD и HK взяты могутъ быть за высоты, а EF и LH за основанія (§ 167), для сей причины будетъ

$$ECDF : LHKM = EC : HL \text{ (§ 171) или } ABCD : GHİK = EC : HL$$

т. е. параллелограммы равное основаніе имѣющіе содержатся между собою такъ какъ ихъ высоты.

Слѣдствіе 2.

173) Понеже всякой треугольникъ есть равенъ половинѣ параллелограмма, шожь основаніе и высоту имѣющаго; слѣдовательно, что здѣсь доказано о параллелограммахъ, шожь должно разумѣть и о Fig. треугольникахъ: что треугольники ABC и 84. DEF содержатся между собою такъ, какъ ихъ основанія BC и EF, а треугольники ABC и abc равныя основанія имѣющіе со- Fig. держатся между собою такъ какъ высоты 85. CD и cd.

ТЕОРЕМА 34.

Fig. 174) Параллелограммы ABCD
86. и abcd или треугольники ABD и abd
2. ~~разные~~ ~~основания~~ имѣющие суть
между собою пѣ содержаніи сложен-
номѣ изъ содержаніи BE:be и AD:ad,
то есть

$$ABCD:abcd = EB. AD:eb. ad.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Здѣлай трепей прямоугольникъ
FF, въ которомъ бы высота FG равна
была высотѣ BE, а основание GI равно
основанію ad, то будетъ

$$ABCD:FGHI = AD:ad \text{ (§ 171)}$$

$$FGHI:abcd = BE:be \text{ (§ 172) слѣдоват:}$$

$$ABCD:abcd = EE. AD:be. ad. \text{ (§ 87. ариѳм.) и}$$

$$\frac{1}{2}ABCD:\frac{1}{2}abcd = BE. AD:be. ad.$$

Слѣдствіе 1.

175) Если будетъ $ABCD = abcd$,
то будетъ $AD. BE = ad. be$. слѣдовательно
 $AD:ad = be:BE$, т. е. когда высота одного
параллелограмма, или треугольника содер-
жащая будетъ къ высотѣ другого, такъ
какъ основаніе послѣдняго къ основанію пер-
ваго,

ваго, тогда параллелограммы или треугольники будутъ равны между собою,

Слѣдствіе 2.

176) Если и въ параллелограммѣхъ или треугольникѣхъ будетъ $AD:BE = ad:be$, или $AD:ad = BE:be$; то параллелограммы или треугольники будутъ между собою въ содержаніи удвоенномъ высотъ или оснований, такъ какъ всѣ квадраты,

Примѣчаніе.

177) Если высота и основаніе изображены будутъ числами, то и содержаніе параллелограммовъ или треугольниковъ изобразить можно будетъ въ числахъ. Напримѣръ, ежелибы было $AD=5$, $BE=4$, $ad=3$, $b=2$; то произойдетъ $ABCD:abd = 20:6$. Тоже должно разумѣть и о треугольникахъ,

ЗАДАЧА 17.

178) Прямолінейную какую нибудь плоскость примѣрять.

рѣшеніе.

Почеже мѣра съ мѣряемою величиною должна быть одинакаго роду, и

мѣрять не что иное есть, какъ находить содержаніе мѣры къ мѣряемой величинѣ, или сколько разъ мѣра въ предложенной величинѣ содержицца; по явствуемъ, что въ семъ случаѣ за мѣру надлежитъ взять какую нибудь площадь, на примѣръ квадрата, котораго бокъ **AB** или **AD** есть обыкновенно употребляемая мѣра. Взявши сей бокъ за единицу, надлежитъ искать содержаніе предложенной фигуры къ квадрату за мѣру взятому. Пусть данная плоскость будетъ параллелограммъ **AC**, и мѣра квадрата **EG**. Пусть число единицъ, какова есть **EF** или **EH**, въ бокѣ **AB** содержащихся будетъ $\equiv a$, и въ бокѣ **AD** $\equiv b$; то будетъ (§ 174)

$$EFGH : ABCD \stackrel{J}{=} 1 : ab.$$

Слѣдовательно въ параллелограммѣ **AC** число единицъ квадратныхъ **EG** будетъ $\equiv ab$. По сему площадь параллелограмма находится, ежели основание на высоту умножится.

Слѣдствіе 1.

179) Треугольникъ равенъ половинѣ параллелограмма, шожъ основание и высоту
св

сѣ треугольничкомъ иѣющаго (6 165). Но площадь параллелограмма, ежели высота его будетъ $\equiv h$, а основаніе $\equiv b$, есть $\equiv bh$; слѣдовательно площадь треугольника будетъ $\equiv \frac{bh}{2}$.

Слѣдствіе 2.

180) Всякой чепвероугольникъ можеть раздѣленъ бытъ діагональною на два треугольника: слѣдовательно площадь его найдется, ежели площади треугольниковъ въ одну сумму сложены будутъ. Пусть будетъ чепвероугольникъ $ABCD$: Проведи діагональную AD , которою чепвероугольникъ $ABCD$ раздѣленъ будетъ на два треугольника ABD и ACD . Изъ точекъ B и C къ діагональной, за основаніе взятой, проводи перпендикуляры BF и CE . Пусть будетъ $AD \equiv d$, $BF \equiv a$, $CE \equiv c$; площадь чепвероугольника $ABCD$ будетъ $\equiv \frac{1}{2}ad + \frac{1}{2}dc \equiv \frac{1}{2}d(a+c)$. Fig. 88.

Слѣдствіе 3.

181) Ежели въ чепвероугольникъ два противоположащие бока будутъ между собою параллельны, то высота, на которые чепвероугольникъ діагональною раздѣленъ, будетъ разстояние между параллельными, а основанія ихъ бока параллельные. Пусть будетъ $AB \equiv b$, $CD \equiv c$, $BE \equiv a$, Fig. 89.
Р 2
по 89.

то площадь чешвер: $ABCD$ будетъ $= \frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}ac$
 $= \frac{1}{2}a(b+c)$.

Слѣдствіе 4.

182) Понеже всякая фигура на треугольники раздѣлена быть можетъ ; то изъ сего явствуетъ , коимъ образомъ данной фигуры площадь найти можно.

Примѣчаніе.

183) Когда бокъ квадрата AB за Fig. мѣру принятаго раздѣлится на десять рав-
 90. ныхъ частей , и будетъ $AE = \frac{1}{10}AB$; то AF будетъ десятая часть квадрата AD .
 Ежели притомъ будетъ $AG = \frac{1}{10}AC$; то AH будетъ десятая часть паралл: AF , или сотая часть квадрата AD . Ежели подобное дѣленіе боковъ AE и AG далѣе продолжено будетъ ; то найдется десятая и сотая часть квадрата AH , то есть тысячная , десяти тысячная часть квадрата AD , и такъ далѣе. По сему квадратный футъ содержитъ въ себѣ сто квадратныхъ дюймовъ , и дюймъ квадратной сто линей квадратныхъ , ежели футъ раздѣляется на 10 дюймовъ , и дюймъ на 10 линей. А ежели футъ раздѣляется на 12 дюймовъ , а дюймъ на 12 линей ; то футъ квадратной будетъ въ себѣ содержать 144 ~~линей~~ квадратныхъ. Изъ сего явствуетъ , коимъ образомъ въ числѣ площадь изобража-

ющею

ищемъ отдѣлять должно числа футы , дюимы , линии и проч : означающія . такъ напримѣръ въ параллелограммѣ $ABCD$, пусть будетъ $AB=146'''$, $BC=104'''$. Площадь сего параллелограмма будетъ $AB \times BC = 15184'''$ квадратныхъ , или $1'$, $51''$, $84'''$, ежели десятичное дѣленіе мѣры принято будетъ , а въ другомъ случаѣ $105''$, $64'''$.

ЗАДАЧА 18.

184) Фигурѣ плоской прямолинейной болѣе , нежели три оока , имѣющей нарисать другую равную , въ которой бы число боковъ однимъ было меньше противъ прежней.

РѢШЕНІЕ.

Пусть будетъ фигура $ABCDEFA$ Fig. 91. Отдѣли отъ нея которой нибудь треугольникъ ABF , боку фигуры FE продолжи далѣе такъ , чпобъ EG была прямая линия , чрезъ точку A проводи параллельную линію BF , и продолжи до тѣхъ поръ , пока не пересѣчетъ линію GE , Наконецъ точки B и G соедини линіею BG , будетъ искомая фигура $GBCDEFG$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Понеже линия AG параллельна линіи BF , треугольнѣ ABF будетъ равенъ треугольнику BGF . (91б+) Слѣдовательно фигура $BCEC$ равна фигурѣ $ABCEFG$, а число боковъ въ ней находящихся будетъ однимъ меньше, нежели въ фигурѣ AD , потому что вмѣсто бокѣ AB , AF и FE здѣлались только два BG и GE .

Слѣдствіе.

185) По сему уменьшая число боковъ на послѣдокъ данной фигурѣ найдемся равной треугольнѣ.

ТЕОРЕМА 35.

186) Всякая фигура регулярная равна треугольнику, котораго основаніе равно суммѣ сторонъ фигуры или ея окружности, а высота треугольника радиусу круга въ фигурѣ описаннаго.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Пусть будетъ фигура регулярная $ABCFED$, и C центръ круга въ ней напи-

написаннаго. Изъ С къ угламъ фигуры проводи прямыя линіи : такимъ образомъ фигура раздѣлился на столько равныхъ между собою преугольниковъ , сколько въ ней боковъ находится , по-тому что основанія ихъ будутъ бока фигуры , а высота всякаго перпендикуля изъ центра къ боку проведенной , то есть радіусъ круга въ фигурѣ написаннаго (§ 119). Слѣдовательно сумма всѣхъ преугольниковъ равна будетъ одному $\triangle CDE$, котораго основаніе $\triangle = AB + BF + FE + ED + DA$, а высота радіусъ Са , и преугольникъ $\triangle CDE$ равенъ цѣлой фигурѣ $ABFED$.

Слѣдствіе 1.

187) Понеже кругъ тѣмъ меньше отъ фигуры регулярной въ немъ написанной разнился , чѣмъ больше боковъ фигура имѣть будетъ , и разность на послѣдокъ исчезаетъ , ежели число боковъ будетъ бесконечно , такъ что полигона регулярнаго окружность равна будетъ окружности круга. Слѣдовательно и площадь круга равна будетъ треугольнику , котораго основаніе окружность круга , а высота его радіусъ.

Слѣдствіе 2.

188) Подобнымъ образомъ секторъ круга равенъ треугольнику, котораго основаніе равно дугѣ сектора, а высота радиусу.

Примѣчаніе.

189) Чтобы найти площадь круга, надлежитъ сперва найти прямую линію, которая бы равна, была окружности. Пусть діаметръ, котораго площадь ищется, будетъ $\equiv a$, окружность его будетъ $\equiv \frac{\pi a}{2}$ (6 153) и площадь сего круга $\equiv \frac{\pi a^2}{4}$, а площадь сектора, котораго дуга къ своей окружности содержится такъ какъ 1 : π , будетъ $\equiv \frac{\pi a^2}{4\pi}$. Но не имѣемъ еще способа Геометрическаго находить прямую линію равную окружности, или содержанія діаметра къ всей окружности, которое входитъ въ изображеніе окружности, и площади круга. И такъ должно сдѣлать что должно содержаніями, которыя отъ истиннаго не много разнятся, каковы суть слѣдующія; $\delta : \pi \equiv 7 : 22$, или $\equiv 100 : 314$, или $\equiv 113 : 355$, изъ которыхъ accuratѣйшее есть по лѣннее и называется *Меделью*. По которому площадь круга, котораго поперешникъ $\equiv a$, будетъ $\equiv \frac{355 a^2}{452}$, то есть какъ 452 къ 355 такъ квадрать діаметра даннаго

даннаго круга къ площади круга, а площадь сектора $= \frac{255\pi a^2}{452}$

190) Какъ изъ даннаго содержанія поперешника къ окружности можно опредѣлить всякаго круга площадь, котораго диаметръ извѣстенъ; такъ изъ данной площади можно найти его поперешникъ и окружность. Пусть площадь круга будетъ $= A$, то бы было $A = \frac{\pi a^2}{4}$, диаметръ его будетъ $a = \sqrt{\frac{4A}{\pi}}$, и окружность $= \sqrt{\frac{4A}{\pi}}$. Изъ сего явствуется, что всѣ задачи до круга касающіяся зависятъ отъ содержанія поперешника къ окружности, которе Г. Мейеръ находить, полагая, что окружность круга равна диаметру трижды взятому $+ \frac{1}{7}$ диаметра $- \frac{1}{11}$ сегой части диаметра, то есть $\delta : \pi = 1 : 3 + \frac{1}{7} - \frac{1}{11} = 1 : \frac{355}{113} = 113 : 355 = 1000000 : 31415929$.

ТЕОРЕМА 36.

191) Треугольники подобные содержатся между собою такъ, какъ квадраты сторонъ равныхъ угловъ противоположащихъ.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Пусть будутъ подобные треугольники ABC и abc: къ основаніямъ AB и ab.

Р 5

про-

1) Задача найти радиусъ круга по площади сектора $= \frac{255\pi a^2}{452}$ по формуле найдемъ радиусъ

проведи перпендикулярныя линии CD и cd , то будупъ треугольники ACD , и acd такъ, какъ и треугольники CDB и cdb подобны между собою; и для того будетъ $AD:ad=DC:dc$ и $DB:db=DC:dc$. Слѣдовательно $AD+DB:ad+db=DC:dc$ (§ 85 Арифм.), то есть $AB:ab=DC:dc$ откуда произойдетъ $dc=\frac{ab \cdot DC}{AB}$. Но $ABC:abc=AB \cdot BC:ab \cdot bc$ (§ 174): поставъ вмѣсто $dc=\frac{ab \cdot DC}{AB}$, и будетъ $ABC:abc=AB^2:ab^2$. Изъ сего явствуетъ, что треугольники подобные суть между собою такъ, какъ квадраты оснований, или понеже всякой бокъ можетъ быть за основаніе, какъ квадраты боковъ равнымъ угламъ противоположащихъ.

Слѣдствіе 1.

192) Если въ пропорціи $ABC:abo=AB \cdot DC:ab \cdot dc$ вмѣсто ab поставишь $\frac{AB \cdot dc}{DC}$; то произойдетъ $ABC:abc=DC^2:dc^2$, то есть подобные треугольники содержатся между собою такъ, какъ квадраты ихъ высотъ.

Слѣдствіе 2.

193) Понеже фигуры подобныя могутъ быть раздѣлены на треугольники подобные;

добные, и по сему фигура $ABCDE$ будетъ $Fig.$ содержаться къ фигурѣ $abcde$ такъ, какъ $AB^2:ab^2$, или $BB^2:ab^2$, пошому что ежели обѣ фигуры раздѣлены будутъ на треугольники, то всякой треугольникъ фигуры $ABCDE$ будетъ содержаться къ подобному треугольнику фигуры $abcde$ такъ, какъ квадратъ котораго нибудь бока фигуры $ABCDE$ къ квадрату бока одинакое положеніе въ прежнемъ имѣющаго фигуры $abcde$. Изъ сего слѣдуетъ, что и сумма всѣхъ треугольниковъ фигуры $ABCDE$ къ суммѣ треугольниковъ фигуръ $ab\ de$ будетъ въ такомъ же содержаніи (6 85 Арием.).

Слѣдствіе 3.

194) Фигуры регулярныя подобныя содержатся между собою такъ, какъ квадраты радиусовъ круговъ, въ которыхъ написаны, или около описаны бытъ могутъ.

Слѣдствіе 4.

195) Слѣдовательно круги и секторы подобныя содержатся между собою такъ, какъ квадраты диаметровъ или полуперешниковъ.

ТЕОРЕМА 37.

196) Во всякомъ треугольникѣ прямоугельномъ сумма квадратовъ боковъ, уголъ прямой составляющихъ,

ляющихъ, равна квадрату бока углу прямоу противоположаго.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Fig. 95. Пусть будетъ треугольникъ прямоугольной ABC : на бокахъ его здѣлаи квадраты $ACDE$, $ABGF$ и $BCHI$. Изъ точки B къ линей DE проводи перпендикулярную линейю BK , а къ точкѣ D линейю BD : изъ точки C къ точкѣ F проведи линейю CF , такимъ образомъ произойдутъ два треугольника ABD и AFC , въ которыхъ $AF = AB$, $AC = CD$, и уголъ $CAF = BAD$. Потому что $BAF = CAD$, то будетъ и $BAF + BAC = CAD + BAC$ (§ 40 Ариемъ:) Слѣдовательно треугольники суть равны между собою. (§ 42) Но и треугольникъ FAC съ квадратомъ $ABGF$ стоитъ на одномъ основаніи и между шѣмижъ параллельными, также и треугольникъ AED съ параллелограммомъ $ADKL$; и для того $AFC = ABGF$, $ABD = ADKL$ (§ 165). Но $AFC = ABD$: слѣдовательно $ABGF = ADKL$. Подобнымъ образомъ докажется $ABGF + BCHI = ACDE$.

Примѣчаніе.

197) Сие предложеніе можно доказать изъ § 161 слѣдующимъ образомъ. Поне-

же $BC:DC=DC:AC$, и $AB:AD=AD:AC$; Fig. то будетъ $DC^2=AC.BC$, $AD^2=AB.AC$ 77. и $DC^2+AD^2=AC.BC+AC.AB$ или $DC^2+AD^2=AC(AB+BC)=AC^2$.

Слѣдствіе 1.

198) Посредствомъ сего предложенія Fig. можно найти двумъ, тремъ, и многимъ квад- 96. раатамъ одинъ равной. Пусть данные квадраты будутъ А, В, С. Къ боку EF квадрата А поставь бокъ квадрата В полъ прямымъ угломъ; то будетъ $EF^2=A+B$. Потомъ къ боку EF поставь бокъ квадрата С также подъ прямымъ угломъ, и будетъ $EK^2=A+B+C$. Подобнымъ образомъ многимъ квадратамъ равнымъ или неравнымъ между собою одинъ равной найдется.

Слѣдствіе 2.

199) Когда изъ одного квадрата вычестъ надлежитъ другой, или найти ихъ разность; то также помощію сего предложенія учинить можно. Пусть будетъ бокъ Fig. большаго квадрата АВ: на немъ какъ на ді- 97. аметрѣ опиши полукружіе, и съ к твораго нисудь конца, на примѣрѣ А, перенеси на окружность бокъ меньшаго квадрата, которой пусть будетъ АС, бокъ искомаго квадрата будетъ СВ, потому что $AB^2=AC^2+CB^2$ откуда $AB^2-AC^2=CB^2$ (§ 40 Арием.).

Прикѣ-

Примѣчаніе.

200) Сія Теорема называется *Пифагоровою*, потому что ея изобрѣлъ *Пифагоръ*, и въ ка углы прямой, остающіе и звалъ *Катетами*, (*Cateti*) а къ углу прямому противолежащей *Гипотенузу* (*Hypotenusa*). По сему Теорема можетъ быть изображена слѣдующимъ образомъ. Въ треугольникъ прямоугольномъ квадраты Катетовъ равны квадрату Гипотенузы.

ЗАДАЧА 19.

201) Даннымъ двумъ подобнымъ фигурамъ нарисовать одну обѣимъ равную и подобную.

рѣшеніе.

Fig. 98. Пусть данныя фигуры будутъ $ABCD$ и $abcd$: возьми изъ фигуръ по боку или по діагональной, которые бы одинакое положеніе имѣли, на примѣръ AB и ab , и ихъ соедини подъ прямымъ угломъ, чѣмъ произидетъ треугольникъ EFG , въ которомъ $EF = ab$ и $FG = AB$. И, линію EG заѣмливъ фигуру $GENI$ подобную которой чѣмъ изъ прежнихъ такъ, что бокъ GE такоежъ имѣлъ положеніе въ разсужденіи угловъ фигуры $GENI$, какое имѣютъ бока AB

и ab въ разсужденіи своихъ фигуръ. Искомая фигура будетъ $GENI$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Понеже $ABCD : abcd = AB^2 : ab^2$ (§ 193),
и $ABCD + abcd : abcd = AB^2 + ab^2 : ab^2$ (§ 83 Ар.);
то для равенства линей AB и FG ,
и FE произойдетъ $ABCD + abcd : abcd = GE^2 : ab^2$.
Но $GENI$ подобна фигурѣ $abcd$.
Слѣдовательно будетъ

$$GENI : abcd = GE^2 : ab^2 \text{ и}$$

$$GENI = ABCD + abcd.$$

Примѣчаніе.

202) Изъ рѣшенія предложенной задачи видѣть можно, коимъ образомъ, ежели даны будутъ двѣ подобныя фигуры, можно написать третью, которая бы равна была разности между данными фигурами.

Слѣдствіе 1.

203) По сему двумъ кругамъ можно найти третей равной. Пусть діаметръ одного будетъ $= A$, а другого $= B$: діаметръ искомаго будетъ $= \sqrt{AA + BB}$, или многімъ можно описать одинъ равной. Ежели будетъ

$A=B$, то диаметръ искомаго круга будетъ $=A\sqrt{2}$; а ежели число равныхъ круговъ будетъ $=N$, то диаметръ круга, которой имъ всѣмъ равенъ быть долженъ, будетъ $=A\sqrt{N}$.

Примѣчаніе.

204) Хотя цѣлаго круга площади найти не можемъ; однакожъ сего те рема случай подала къ нахсденію площадей разныхъ его частей. Первой изобрѣтатель былъ такой части Гипократъ Хислой, которая отъ изобрѣтателя и имя получила, и состоитъ въ слѣдующемъ. Въ к. комъ имѣя кругъ $AD^{\circ}E$ провести належащъ для поперешника AB и DE , которые бы пересѣкали сея по въ трымъ угламъ. Изъ точки E радиусомъ AE или $EB = \sqrt{AC^2 + CE^2} = \sqrt{AC^2 + CE^2}$; описать кругъ $GL^{\circ}H$. Площадь полукруга $CAFBH$ будетъ равна площади круга $AL^{\circ}BE$ (б 203): и понеже уголъ AEB прямой, секторъ $AEBF$ будетъ $=$ полукругу $DB^{\circ}C$. Опними какъ сѣмъ сектора, такъ и отъ полукруга сегментъ $AFBC$, и будетъ треугольникъ $AEB = ACBFA = AgEG + Bh^{\circ}H$.

205) Изъ б 199 видно, что когда на линіи AB опишется полукружіе, и изъ точекъ A и B къ какой нибудь точкѣ на окружности взятой проведены будущъ линіи AC и BC ,

и ВС, то сумма полукруговъ описанныхъ на Fig. линияхъ АС и СВ равна будетъ полукругу 100 АСВ, то есть $ACB = ADC + CEB$, опни- ми въ обѣихъ сторонахъ сегменты АФС и СГВ, то будетъ треугольникъ $ACB = AFCD + BGCEB$.

ТЕОРЕМА 38.

206) Во всякомъ параллело- грамѣ сумма квадратовъ боковъ равна суммѣ квадратовъ диагональ- ныхъ.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Пусть будетъ параллелограммъ Fig. АЕСД, изъ угла А проведи перпенди- 101 кулярную линию АЕ, и изъ точки С на предложенную АВ перпендикулярную ЕС, то будетъ $EC = AF$, $CF = AE$. Сверхъ сего $AD^2 = AF^2 + FD^2$ и $CB^2 = EC^2 + EB^2$ (§ 196); Но $FD^2 = (CD - CF)^2 = CD^2 - 2 CD \times CF + CF^2$ и $EB^2 = (AB + EA)^2 = AB^2 + 2 AB \times EA + EA^2$. Слѣдовательно $AD^2 + CB^2 = AF^2 + CD^2 - 2 CD \times CF + CF^2 + EC^2 + AB^2 + 2 AB \times AE + AE^2$. Но $AF^2 + CF^2 = AC^2$ и $EC^2 + AE^2 = AC^2 = BD^2$. Изъ сего произойдетъ $AD^2 + CB^2 = CD^2 + AC^2 + AB^2 + BD^2$, или $AD^2 + CB^2 = 2AB^2 + 2AC^2$.

ТЕОРЕМА 39.

Fig. 207) Во всякомъ четырехуголь-
 102 никѣ ABCD , ежели диагональны AD
 и BC раздѣлены будутъ на двѣ ра-
 вныя части въ точкахъ G и F , и
 пропелется линия FG , то будетъ
 $AB^2 + BD^2 + CD^2 + AC^2 = AD^2 + BC^2 + FG^2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Изъ точки B чрезъ F проводи ли-
 нию BL , чтобъ была $BF = FL$. Потомъ
 изъ точки D проводи DM параллельную
 боку AC , и изъ точки B линію BM
 параллельную линіи CL. Сверхъ сего
 когда проведутся линіи AM и LM ,
 то произойдутъ параллелограммы
 ACDM и BCLM , и въ параллелограммѣ
 ACDM будетъ $AC^2 + CD^2 = AD^2 + CM^2$ въ
 паралл: BCLM будетъ $BC^2 + CL^2 = BL^2 +$
 CM^2 (§ 206). Изъ сего найдемся
 $CM^2 = AC^2 + CD^2 - AD^2$ и
 $CM^2 = BC^2 + CL^2 - BL^2$ слѣдовательно

$$AC^2 + CD^2 - AD^2 = BC^2 + CL^2 - BL^2 \text{ или } AC^2 + CD^2 = BC^2 + CL^2 + AD^2 - BL^2$$

Но по свойству параллелограммовъ въ
 § 206 доказанномъ будетъ еще $AB^2 +$
 $BD^2 = AD^2 + BL^2$ и $AC^2 + CD^2 + AB^2 + BD^2 =$
 BC^2

$BC^2 + CL^2 + AD^2$ (§ 40 Арием.), а для подобія треугольников BGF и BCL должно быть $BF^2 : BL^2 = GF^2 : CL^2$. Но $BL^2 = BF^2$, следовательно и $CL^2 = FG$, и $AC^2 + CD^2 + AB^2 + BD^2 = BC^2 + AD^2 + FG^2$.

С л ѣ д с т в і е.

208) Если будетъ $GF = 0$, тогда будетъ $AC = ED$, и $BE = EC$; и произойдетъ $AC^2 + CD^2 + AB^2 + BD^2 = BC^2 + AD^2$.

ГЛАВА 5.

О ПОЛОЖЕНИИ ПЛОСКОСТЕЙ.

ОПРЕДѢЛЕНІЕ 22.

209) Линія къ плоскости MN перпендикулярною [perpendicularis] называется, если со всѣми линиями на плоскости MN чрезъ точку B проведенными дѣлаются углы прямые, то есть, когда углы ABC , ABF , ABD , ABE будутъ прямые.

Fig.
103

ОПРЕДѢЛЕНІЕ 23.

310) Плоскость PQ къ плоскости MN перпендикулярною называется,

Fig.
104

ся , когда линей АВ , CD на плоскости PQ проведенныя перпендикулярно къ общему плоскостей разсѣзу PR , будучи перпендикулярны и къ плоскости MN.

Примѣчаніе.

211) Линей , въ которой плоскости взаимно себя пересѣкаютъ , не можетъ быть никакая какъ прямая ; потому что ежели положимъ , что линей сѣченія есть PSK , то должно , чтобъ и плоскость которая нибудь имѣла такуюжъ фигуру , чему въ такомъ случаѣ , когда поверхности MN и PQ берутся за плоскіе , быть не возможно.

ТЕОРЕМА 40.

212) Ежели линей АВ къ двумъ линеймъ CD , EF взаимно себя пересѣкающимъ на плоскости MN проведеннымъ будетъ перпендикулярна , то и ко всякой линеймъ чрезъ точку В проведеннымъ , то есть къ сальной плоскости будетъ перпендикулярна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

На плоскости MN возми $EB=BF$, и $CB=BD$, концы Е и С соедини линейю

неею EC , D и F линейю DF , и будетъ $EC=DF$, изъ точки A къ концамъ линей EF и CD проводи линей AE , AC , AD , AF , то будетъ $AE=AF$, $AC=AD$. Сверхъ сего чрезъ точку B проводи линейю gh , то будетъ $gB=hB$. Проведи и линей Ag и Ah , которые также между собою будутъ равны, треугольникъ $AgB=$ треугольнику AhB , и уголъ $ABg=$ углу ABh . Следовательно линей AB къ линей gh будетъ перпендикулярна. Такимъ же образомъ можно доказать и о всѣхъ другихъ линейхъ чрезъ точку B проходящихъ.

ТЕОРЕМА 41.

213) Въ точку какую нибудь B на плоскости MN находящуюся не можетъ болѣе какъ одна уласть Fig. линей, которая бы была перпенди- 107
кулярна къ плоскости.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Пусть будетъ AB перпендикулярная линей къ плоскости MN , она будетъ перпендикулярна и ко всякой лини, напр: BC на плоскости проведенной. Представь себѣ, что чрезъ точки A , B , C положена другая плоскость $ABCD$,
с 3 къ пло-

къ плоскости MN перпендикулярная ,
то понеже уголъ ABC прямой , всякая
линей на плоскости ABCD къ точкѣ B
проведенная будетъ дѣлать уголъ
меньше прямого.

Слѣдствіе.

214) Изъ точки какой нибудь A къ
Fig. плоскости MN не можетъ болѣе какъ одна
108 перпендикулярная линей проведена быть ,
потому что ежели бы сверхъ AB была пер-
пендикулярная AC къ той же плоскости ,
тобъ ACB былъ уголъ прямой , но ABC
есть прямой , слѣдовательно уголъ ACB дол-
женъ быть острый.

ОПРЕДѢЛЕНІЕ 24.

215) *Наклоненге* [Inclination] пло-
Fig. скости AB къ плоскости MN называется
109 уголъ IEF или HCD содержащейся
между линиями IE и EF или HC и CD
перпендикулярными къ разрѣзу плоско-
стей BG , изъ которыхъ IE и HC про-
ведены на плоскости AB , EF и CD на
плоскости MN.

ОПРЕДѢЛЕНІЕ 25.

216) Ежели уголъ IEF или HCD
будетъ прямой , то плоскость AB на-
зывается

зывается перпендикулярною [perpendicularis] къ плоскости MN, а если угол IEF не будетъ прямой, то плоскость АВ называется наклоненною [obliqua] къ плоскости MN.

ТЕОРЕМА 42.

217) Если линия АВ будетъ перпендикулярна къ плоскости MN то и всякая плоскость положенная чрезъ линию АВ будетъ перпендикулярна къ плоскости MN; и если плоскость EG къ плоскости MN будетъ перпендикулярна, то и линия АВ на плоскости EG проведенная перпендикулярная къ общему разрѣзу EF, будетъ къ плоскости MN перпендикулярна. Fig. 110

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

1) На плоскости MN проводи линію BD. Понеже линия АВ перпендикулярна къ плоскости MN, то перпендикулярна будетъ и къ линіямъ BD и EB, слѣдовательно и плоскость EG будетъ перпендикулярна къ плоскости MN.

2) А ежели плоскость EG будетъ перпендикулярна къ плоскости MN , и уголъ ABE прямой; то будетъ и уголъ ABD прямой; по сему AB дѣлается съ двумя линиями BD и BE на плоскости MN проведенными прямыми углы, и къ плоскости MN будетъ перпендикулярна.

ТЕОРЕМА 43.

218) *Fig. 111* Ежели AB будетъ перпендикулярна къ плоскости MN , и линия AB проведется параллельная CD , то и CD будетъ перпендикулярна къ плоскости MN , и ежели дѣлѣ линии AB и CD будутъ перпендикулярны къ плоскости MN , то между собою будутъ параллельны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

1) Понеже линия CD параллельна линіи AB , то чрезъ ихъ положимъ можно плоскость AD . Но понеже AB перпендикулярна къ плоскости MN , то и плоскость AD будетъ перпендикулярна къ той же плоскости. (§ 217) Ежели разбѣвъ плоскостей будетъ ли-

nea

нея BD , то будетъ уголъ ABD и уголъ CDV прямой же; следовательно CD , на плоскости AD перпендикулярной къ плоскости MN , будетъ перпендикулярна къ разрыву BD , по сему и къ самой плоскости MN .

Fig.

2) Если бы AB и CD будучи перпендикулярны не были параллельны, то линія AB чрезъ точку D параллельна будетъ другая какая нибудь, напримеръ ED , и припомъ перпендикулярна къ плоскости MN , но CD перпендикулярна къ плоскости MN ; следовательно ED ни перпендикулярна, ни параллельна быть не можетъ (§ 213).

ОПРЕДѢЛЕНІЕ 26.

219) Плоскости параллельныя называются, копорые пріянуты будучи во всѣ стороны бесконечно ни гдѣ себя не пересѣкаютъ.

ТЕОРЕМА 44.

220) Если какая нибудь линія къ двумъ плоскостямъ будетъ перпендикулярна, то плоскости будутъ параллельны.

С 5

ДОКА-

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Fig. Пусть будутъ плоскости MN и RQ перпендикулярны къ линіѣ АВ. Чрезъ АВ положи плоскость ABCD, которая къ обѣимъ плоскостямъ будетъ перпендикулярна, и прорѣжетъ плоскости въ линіяхъ AC и BD, которые также будутъ перпендикулярны къ линіѣ АВ, и никогда соединиться не могутъ; следовательно ниже плоскости MN и RQ.

Слѣдствіе.

221) Если двѣ параллельныя плоскости MN и RQ пересѣчены будутъ третьей линіею AD, то линіи сѣченій будутъ параллельны, потому что находятся на одной плоскости, а соединиться не могутъ, для того что на плоскостяхъ параллельныхъ находятся.

ТЕОРЕМА 45.

объ

Fig. 222) Части линіей АВ и CD ка- кое нибудь положеніе имѣющихъ между параллельными плоскостями содержащаяся суть пропорциональны между собою.

ДОКА


ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Пусть параллельныя плоскости будутъ MN, PQ и RS. Концы линей соедини линейми AC и BD и проводи линейю AD. Пустьъ треугольникъ ADB плоскость PQ пересѣчетъ въ линей FG, а треугольникъ ACD пустьъ плоскость въ линей EF, то будутъ линей AC, EF такъ какъ и DB, FG параллельны (§ 221), слѣдовательно будетъ $AG:GB=AF:FD$ и $CE:ED=AF:FD$ (§ 134) по сему $AG:GB=CE:ED$, такимъ же образомъ доказано будетъ, что $AB:BD=AG:GE$ или $AB:BD=BG:ED$.

ГЛАВА 6.

О ТѢЛАХЪ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХЪ

ОПРЕДѢЛЕНІЕ 27.

223) Ежели изъ угловъ фигуры Fig. какой нибудь прямолинейной ABCDE  проведутся параллельныя и равныя между собою линей, AF, BG, CH, DI, EK, попомъ концы F, G, H, I, K соединятся прямыми линейми FG, GH, HI, IK, и проч: такъ чтобъ на плоскости MN,

MN, на которую всѣ точки F, G, H, I, K упадутъ произошла фигура FGHIK, то пѣло, которое заключающъ плоскости ABCDE, FGHIK, AG, AK, BH, EI и CI называется *призма* [Prisma].

Слѣдствіе 1.

224) Понеже всѣ линии AF, BG, CH и проч: суть равны и параллельны между собою, то и плоскость, на которую фигура FGHIK падаетъ, будетъ параллельна фигурѣ ABCDE, или фигура ABCDE параллельна фигурѣ FGHIK, и какъ шу такъ и другую можно взять за основаніе фигуры. *примѣ.*

Слѣдствіе 2.

225) Понеже BG равна и параллельна линіи CH, и притомъ BC параллельна линіи GH, то будетъ и $BC = FK$, $ED = KI$, $CD = HI$. Слѣовательно фигура ABCDE равна фигурѣ FGHIK, бока призмы будутъ параллелограммы, а числомъ ихъ будетъ столько, сколько боковъ будетъ имѣть основаніе.

Слѣдствіе 3.

226) Ежели призма пересѣчется плоскостью параллельною основанію, то фигура

тура разрѣза равна будетъ фигурѣ ABCDE или FGHIK.

Слѣдствіе 4.

227) Понеже бока призмы суть плоскости и припомъ параллелограммы, поверхность призмы найдется, ежели всѣхъ параллелограммовъ, спосрсны призмы представляющихъ, площади сложены будутъ въ одну сумму.

опредѣленіе 28.

228) Ежели linee AF, BG, CH и проч: будутъ перпендикулярны къ плоскости MN, то призма называется перпендикулярная или прямая [rectum], а ежели не будутъ перпендикулярны, то называется косая [obliquum].

Слѣдствіе.

229) По сему призмы прямой, выключая основанія, поверхность будетъ $= (AB + BC + CD + AE) \times AF$, и поверхность всей призмы найдется, ежели къ боковой поверхности $(AB + BC + CD + ED + AE) \times AF$ прибавны будутъ площади оснований.

опредѣленіе 29.

230) Ежели основание будетъ параллелограммъ ABCD, то такая призма называется параллелепипедъ (Parallelipedum).

Слѣд-

Слѣдствіе.

231) Понеже линіи CD , GH , AB , EF суть параллельны и равны между собою, также и линіи GC , HD , FB и AE параллельны и равны между собою, то будетъ параллелограммъ $GHCD$ — паралл.: $ABEF$, параллелограммъ $ACGE$ — паралл.: $BDHF$, слѣдовательно параллелепедъ включается въ шести параллелограммахъ, изъ которыхъ взаимно противоположныя суть равны между собою.

ОПРЕДѢЛЕНІЕ 30.

232) Ежели въ параллелепедѣ прямомъ основаніе будетъ четырехъ-угольникъ прямоугольной, параллелепедъ называется *прямоугольной* [Rectangulum], а ежели основаніе будетъ квадратъ, и при томъ $AC = CG$, то называется *кубъ* [Cubus].

Слѣдствіе.

233) По сему такого параллелепедъ поверхность и съ основаніями будетъ $= GC \times (AB + AC) + AC \times AB$, а куба поверхность, понеже $AC = CG = AB$ будетъ $= 6AB^2$.

ОПРЕДѢЛЕНІЕ 31.

234) Если основаніе будетъ кругъ, то такое тѣло называется цилиндръ [Cylindrus], линия MN, центры круговъ соединяющая называется осью [axis]. Если ось къ основанію будетъ перпендикулярна, цилиндръ называется перпендикулярной или прямой [rectus], а если не перпендикулярна, называется косою [obliquus].

Примѣчаніе.

235) Цилиндръ также прямой произойдетъ, если четвероугольникъ прямоугольной около одного своего бока, какъ около оси обращаться будетъ.

Слѣдствіе 1.

236) Понеже кругъ есть полнотѣ регулярной, безчисленное множество боковъ имѣющей, то и цилиндръ будетъ призма, безчисленное множество боковъ имѣющая.

Слѣдствіе 2.

237) По сему и поверхность прямого цилиндра, выключая основанія, будетъ равна окружности основанія умноженной на высоту.

соту цилиндра. Пусть будетъ діаметръ круга $=d$, а высота цилиндра $=a$, окружность основанія будетъ $=\pi d$, следовательно поверхность цилиндра будетъ $=\pi ad$.

Слѣдствіе 3.

238) Если цилиндръ пересѣченъ плоскостью параллельною основанію, то фигура сѣченія будетъ также кругъ равной основанію.

ТЕОРЕМА 47.

239) Призмы, параллелипеды и цилиндры, которые то же или равное основаніе имѣютъ и между параллельными плоскостями находятся, суть равны между собою.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Представь себѣ, что призмы или цилиндры пересѣчены параллельно основанію: Фигуры, которыя сѣченія произведутъ должны быть равны между собою, какъ бы сѣченіе ни учинено было (§ 226, 238). А понеже не можетъ быть сѣченій въ одномъ мѣстѣ, какъ въ другомъ; следовательно

но призмы цилиндры и параллелепипеды на равныхъ основанияхъ стоящие , и между параллельными плоскостями находящіеся суть равны между собою.

Слѣдствіе.

240) По сему всякой призъмъ косою и цилиндру косому можно здѣлать равной прямоугольной параллелепипедъ , ежели основанію призмы или цилиндра здѣланъ будетъ равной прямоугольникъ , а высота равна будетъ высотѣ призмы или цилиндра.

Примѣчаніе.

241) *Высота* призмы или цилиндра есть перпендикулярная линия къ обѣимъ плоскостямъ , на которыхъ основанія находятся.

242) Не подумай бы кто , что полагаю , будто тѣла состоятъ изъ плоскостей , когда равенствомъ оныхъ доказываю равенство тѣлъ : равенство плоскостей только за знакъ равенства тѣлъ почитается.

ТЕОРЕМА 48.

243) Призмы и цилиндры равнаго основанія и имѣющаго содержатся
Т
между

между собою, такъ какъ ихъ вы-
соты.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Fig. Пусть будутъ призмы $ABCEFG$ и $MNPT$, въ которыхъ основанія $ABCD$ и PMN суть равны между собою. Раздѣли $PQ=BF$, и чрезъ точку Q пересѣки призму MT плоскостью параллельною основаніямъ, и будетъ описанная призма равна призмѣ $ACEG$, высоту BF раздѣли на сколько нибудь равныхъ частей, и чрезъ всякую точку дѣленія положи плоскость параллельную основаніямъ, такимъ образомъ въ призмѣ $MNPT$ будетъ столько равныхъ между собою призмъ, на сколько частей высота PT раздѣлена будетъ. И ежели плоскость QSR упадетъ на которую нибудь точку дѣленія, то явно есть, что въ призмѣ $MFQR$ столько будетъ равныхъ между собою призмъ, на сколько частей высота PQ раздѣлена Следовательно

$$MNQ \cdot MNPT = PQ : PT \text{ или } ABCEFG : MNPT = BF : PT.$$

А хотя плоскость QR ни съ одною точкою дѣленія не будетъ сходство-
вать,

вать, однакожь не можеть быть, чпобъ въ призъмѣ $MNPQ$ могло быть больше частей или призъмѣ малинькихъ, какъ сколько частей высоты PT содержится въ высотѣ PQ , попому чпо перемѣняя или умножая дѣленіе, на конецъ плоскость QR должна будеть упасть на точку дѣленія, слѣдовательно и въ семъ случаѣ будеть

$$ABCEFG : MNPT = BF : PT.$$

ТЕОРЕМА 49.

244) Призмы и цилиндры одинакой пысоты содержатся между собою такъ какъ ихъ основанія.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Пусть будутъ параллелепипеды прямоугольные $ABCD$ и $abcd$, въ кото- Fig.
рыхъ $CB = cb$, сверхъ сего пусть еще 119
будеть и $BF = bf$, то будетъ и $BD = bd$. Ежели параллелограммы BD и bd взяты будутъ за основанія, то будетъ $ABCD : abcd = AB : ab$ (§ 243) или $ABCD : abcd = ABF : abf$. А хотябы въ параллелепипедѣ $abcd$ не было $bf = BF$, однакожь параллелограмму $abfe$ можно

найти другой равной, въ которомъ бы одинъ бокъ равенъ былъ боку параллелограмма $ABFE$. Изъ сего видно, что всегда будетъ

$$ABCD : abcd = ABF : abf.$$

ТЕОРЕМА 50.

245) Призма или цилиндръ къ призмѣ или цилиндру есть по содержанию сложенно изъ содержаній высотъ и основаній.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Fig. Пусть данныя къ сравненію пѣла ²²⁰будущъ призма $DAEGC$ и цилиндръ HL . Здѣлай другую призму, въ которой бы основаніе $abcd$ равно было основанію $ABCD$, а высота ея равна высотѣ цилиндра HL , то по § 243, 244 будетъ

$$DAEGC : daegc = AE : ae$$

$$daegc : HIKL = abcd : HhI, \text{ слѣдоват.}$$

$$DAEGC : HIKL = AE \times abcd : ae \times HhI$$

$$\text{или } DAEGC : HIKL = AE \times ABCD : HK \times HhI$$

Слѣдствіе 1.

246) Если даны будущія основанія и высоты пѣла въ числахъ, то и содержаніе ихъ числами изображено быть можетъ.

Слѣдствіе 2.

247) Если пѣла будутъ параллелепипеды прямоугольные, то основаніе AF ^{Fig. 119} содежится къ основанію af такъ какъ $AB \times BF : ab \times bf$, въ такомъ случаѣ будетъ

$$ABCD : abcd = AB \times BF \times BC : ab \times bf \times bc.$$

Слѣдствіе 3.

248) Если будетъ $AB = BF = BC$, и $ab = bf = bc$, то есть, если пѣла будутъ кубы, то будетъ $ABCD : abcd = AB^3 : ab^3$.

Слѣдствіе 4.

249) Если основанія призмъ сравниваемыхъ будутъ подобны между собою, то будетъ $ABF : abf = AB^2 : ab^2$ (§ 193). Слѣдовательно $ABCD : abcd = AB^2 \times BC : ab^2 \times bc$; по сему цилиндры суть между собою въ содержаніи сложенномъ изъ содержанія удвоеннаго диаметровъ основаній, и простаго высотъ.

Слѣдствіе 5.

Fig. 250) Ежели будетъ $DAEGC = HKL$,
 120 то будетъ и $AE \times ABCD = HK \times HhIi$, слѣ-
 довательно произойдетъ

$$AE : HK = HhIi : ABCD$$

и обратно, ежели будетъ $AE : HK = HhIi : ABCD$, то будетъ $AE \times ABCD = HK \times HhIi$, то есть тѣла равны между собою.

ЗАДАЧА 20.

251) Вымѣрять или найти толщину призмы или цилиндра.

РѢШЕНІЕ.

Fig. 121 Понеже мѣрять есть находить содержание мѣры къ мѣряемому, изъ сего слѣдуемъ, что когда хочешь мѣрять толстое тѣло, или сыскать его толщину, то мѣра должна быть также толстое тѣло. Возмемъ за мѣру кубъ $ABCDE$, котораго боки $AB = BF = FD$, долженъ быть мѣра въ употребленіе принятая. Чисоу сыскать тѣла какого нибудь толщину, надлежитъ опредѣлить содержание куба за мѣру взятаго къ мѣряемому тѣлу. Пусть бу-
 детъ

деиѣ шѣло , котораго полицину сы-
скаиѣ должно , $MNPQRS$, основаніе его
 $SMN = B$, а высота $NP = A$, боки куба
 $ABCDE = 1$ по § 245 будиѣ

$$ABCDE : MNPQR = 1 : A \times B.$$

Слѣдовательно число единицѣ кубич-
ныхѣ , какова ѣсть $ABCDE$ будиѣ изо-
бражечо произведеніемѣ $A \times B$, по сему
полицина шѣла наидиѣся ежели осно-
ваніе на высоту будиѣ умножено.

Примѣчаніе.

252) Пусть боки куба BF или FE
какѣ выше сказано будиѣ мѣра обыкновен-
но употребляемая , и раздѣлиѣ на 10 рав-
ныхѣ частей , такѣ числоѣ было $bF = \frac{1}{10}BF$.
По точкѣ b переѣчи кубѣ плоскостію па-
раллельною плоскости ED : отѣчернат часть
 EbD будиѣ десятая часть куба ABD .
раздѣли и боки FE на столькожѣ равныхѣ ча-
стей , чтоѣ Fe было $= \frac{1}{10}FE$, чрезѣ точ-
ку e переѣчи кубѣ плоскостію параллель-
ною плоскости BD , и будиѣ fFD , деся-
тая часть шѣла EbD , то ѣсть сотая часть
куба AFD ; такѣжѣ дѣленіе дѣлай на бо-
ки FD , чтоѣ $Fd = \frac{1}{10}FD$, и ежели
чрезѣ точку d плоскостію параллельною осно-
ванію переѣчешѣся кубѣ AFD , то прѣмѣ сѣ-

тѣнями отдѣлился кубъ fFd , десятая часть тѣла fFD . сотая тѣла Ebd , и тысячная куба BFD . Подобными сѣченіями можно найти десятую, сотую и тысячную часть куба fFD , то есть десяти-, стотысячную, сто тысячную и миллионную часть куба AFD и далѣе. По сему ежели бокъ куба FE будетъ футъ, то Fc будетъ дюймъ, слѣдовательно одинъ футъ кубичной содержитъ въ себѣ тысячу дюймовъ кубичныхъ, и одинъ дюймъ кубичной тысячу линей кубичныхъ. Изъ сего можно опредѣлить въ числѣ толщину тѣла изображающемъ, которые знаки означаютъ футы, которые дюймы и проч: только бы извѣстно было, какое дѣленіе мѣры принято, и что означаетъ первой знакъ отъ правой руки.

253) Изъ сего можно разумѣть, какъ находить толщину призмы или цилиндра. Изъ данныхъ линей основаніе составляющихъ должно найти площадь основанія, которая пусть будетъ $= M \times N$, а высота тѣла $= A$. Ежели линей основаніе опредѣляющія, и высота тѣла состоятъ изъ такихъ единицъ, какова ~~есть~~ бокъ куба за мѣру взятаго, то по § 245 будетъ

$$ABCD : MNPQ = 1 : M \times N \times A.$$

Слѣдовательно въ тѣлѣ данномъ столько будетъ единицъ кубичныхъ, какова есть $ABCD$, сколько дастъ произведеніе $M \times N \times A$.

254) Если шло будетъ цилиндъ Fig. ABCD, диаметръ основанія его $AB = D$, ¹²² высота его $AC = A$, площадь основанія будетъ $= \frac{\pi DD}{4}$, и толщина цилиндра будетъ $= \frac{\pi ADD}{4}$.

ОПРЕДѢЛЕНІЕ 32.

255) Если къ угламъ фигуры Fig. ABCDE, изъ точки V въ верхъ взятой ¹²³ проведены будутъ линіи VA, VC, VD, VE, то произойдетъ шло VABCDEV которое *лира* ии *a* [Pyramis] называется. Фигура ABCDE *основаніе* [Basis], треугольники ABV, BVC, CVD и проч: *обка*, а точка V *верхъ* [Vertex] называется.

Слѣдствіе 1.

256) Понеже основаніе можетъ быть треугольникъ, четвероугольникъ, пятиугольникъ, и какой нибудь многоугольникъ, то и пирамида можетъ быть треугольная, четвероугольная и многоугольная.

Слѣдствіе 2.

257) Понеже поверхность пирамиды составляютъ треугольники ABV, BVC, CVD

и проч:

Т 5

и проч: Поверхность пирамиды найдется выключая основание, ежели площади треугольниковъ поверхность составляющихъ сложены будутъ въ одну сумму.

ОПРЕДѢЛЕНІЕ 33.

Fig. 258) ¹²⁴ ^{могильной} Ежели вмѣсто фигуры прямой основаніе будетъ кругъ ADB , и изъ точки въ верьху взяной V проведемъ къ окружности еіо неопредѣленная линия VM , которая въ точкѣ V будучи не подвижна, будетъ двигаться по окружности круга ADB , пока не возвратится на прежнее свое мѣсто, тѣло, которое отсюда произойдетъ называется конусъ [Conus]. Точка V верхъ [Vertex], кругъ ADB основаніе. Линія центръ круга C и точку V соединяющая называется ось [axis], а линія VB изъ верьху V къ какой нибудь точкѣ окружности проведенная бокоу [Latus].

ОПРЕДѢЛЕНІЕ 34.

Fig. 259) ¹²⁵ Конусъ прямой [Conus rectus] называется, ежели ось VC къ основанію будетъ перпендикулярна, косой ежели неперпендикулярна.

При-

Примѣчаніе.

260) Конусъ ничто иное есть, какъ пирамида бесчисленное множество боковъ имѣющая, и конусъ прямой произойдетъ, ежели треугольникъ прямоугольной ACV , около боку своего CV , какъ село оси обращаться будетъ.

ТЕОРЕМА 51.

261) Поверхность конуса прямого $ADB\Gamma$, равна треугольнику MNP , котораго основаніе NP равно окружности ABD , а высота MN равна боку конуса AV .

Fig.
126

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Пусть STU будетъ секторъ круга, котораго радиусъ $ST=MN$, и дуга $TU=NP$, по сему дуга TU равна окружности круга ABD , а радиусъ ST равенъ боку AV , и такъ, ежели конусъ обернешь секторомъ STU , то онъ покроетъ всю его поверхность покрывъ должнъ. Слѣдовательно и треугольникъ MNP будетъ равенъ поверхности конуса.

Слѣдствіе.

262) Пусть будетъ бокъ $AV=L$, диаметръ $AB=D$, поверхность конуса будетъ

$$= \frac{\pi DL}{2}$$

$= \frac{\pi DL}{2\delta}$ и часть поверхности соответствующая дугѣ $AD = \frac{\pi D}{\delta}$ будетъ $= \frac{\pi DL}{2\delta}$.

ТЕОРЕМА 52.

Fig. 263) Поверхность части отсѣ-
27 ченной отъ конуса прямаго $ABEF$,
плоскостью параллельною основанію
равна треугольнику, котораго осно-
ваніе равно окружности, которой
диаметръ есть $= AB + EF$, а высота
бокъ AE .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Понеже поверхность конуса ABV
 $= \frac{\pi \cdot AV \times AB}{2\delta}$ и малаго $EFV = \frac{\pi \cdot EV \cdot EF}{2\delta}$, слѣ-
довательно поверхность части $ABEF$,
которая пусть будетъ $= S$ будетъ
 $= \frac{\pi}{2\delta} (AV \times AB - EV \times EF)$. Но $EV = AV -$
 AE , то произойдетъ $S = \frac{\pi}{2\delta} (AV \times AB -$
 $EV \times EF) = \frac{\pi}{2\delta} (AV(AB - EF) + AE \times EF)$, но
треугольникъ AV подобенъ треуголь-
нику EV , то будетъ

$$AV : EV = AB : EF \text{ и}$$

$$AV : AV - EV = AB : AB - EF \text{ слѣдов.}$$

$$AV \times (AB - EF) = AB \times (AV - EV) = AB \times AE.$$

Изъ

Изъ сего слѣдуетъ , что поверхность
 части $ABFE$ будетъ $= \frac{\pi}{2} (AB \times AE + AE \times$
 $EF) = \frac{\pi}{2} (AB + EF) \times AE$.

Слѣдствіе.

254) Если AE раздѣлится на двѣ
 равныя части , и чрезъ M проведемъ линію
 MN , то будетъ $MN = AB + EF$, слѣдова-
 тельно искома поверхность будетъ $=$
 $\frac{\pi}{2} MN \times AE$.

Примѣчаніе.

255) Что ниговорено о поверхностяхъ
 цилиндровъ и конусовъ все должно разумѣть
 только о прямыхъ , какъ находить поверх-
 ности конусовъ и цилиндровъ косыхъ , о
 томъ говорено будетъ въ своемъ мѣстѣ.

ТЕОРЕМА 53.

266) Пирамиды и конусы , ко-
 торые одно или равное основаніе
 имѣютъ , и между параллельными
 плоскостями находятся суть рав-
 ны между собою.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Пусть будутъ пирамиды треуголь- Fig.
 ны $ABCE$ и $ABCF$ на основаніи ABC , 128
 и между

и между параллельными плоскостями находящаяся. Пересѣки обѣ пирамиды плоскостію MN , параллельною основанію ABC , и фигуры сѣченій будутъ преугольники abc и $\alpha\epsilon\gamma$, которые будутъ подобны основанію ABC , и для того

$$BE : bE = BA : ba$$

$$BF : \epsilon F = BA : \epsilon\alpha.$$

Но сверхъ сего въ преугольникѣ EBF будетъ

$$BE : bE = BF : \epsilon F \text{ слѣдовательно}$$

$$BA : ba = BA : \epsilon\alpha \text{ и } ba = \epsilon\alpha.$$

Такимъ же образомъ доказано будетъ, что $bc = \epsilon\gamma$ и $ac = \alpha\gamma$. Слѣдовательно $abc = \alpha\epsilon\gamma$. Но понеже пирамиды $ABCE$ и $ABCF$ суть одинакой высоты, число сѣченій не можетъ быть больше въ одной, нежели въ другой. Слѣдовательно пирамида $ABCE$ равна пирамидѣ $ABCF$.

Какое основаніе ни возми вмѣсто преугольника ABC , доказательство не перемѣняется. Слѣдовательно и конусы, которые одно основаніе имѣютъ, и между параллельными плоскостя-

скостями находятся, суть равны между собою.

ТЕОРЕМА 54.

267) *Всякая пирамида равнооснованная и равную высоту с призмой имеющая, есть третья часть призмы.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Пусть будетъ прямая призма Fig. ABCDEF, изъ точки D проводи линии 129 DB и DC, такимъ образомъ опишется отъ призмы пирамида ABCD, которой основание фигура ABC равно основанию призмы, такъ какъ и высота AD обща. Остаточной части призмы основание CDEF разбѣли диагональю CE на двѣ равныя части, и понеже CDEF четырехугольникъ прямоугольной, будетъ CDE = CFE, и пирамида CBED равна будетъ пирамидѣ CEFD, понеже имѣютъ равныя основания на одной плоскости и верхи въ одну точку падаютъ. Но ежели въ пирамидѣ CEFD треугольникъ FED вѣсть будетъ за основание, то высота ея будетъ CF; слѣдовательно пирамида

EDFC

EDFC = пирам : ABCD и призма ABCDEF
вырсе больше пирамиды ABCD.

Слѣдствіе 1.

268) Если основаніе пирамиды бу-
детъ $\equiv B$, а высота ея $\equiv A$, то тол-
щина ея будетъ $\equiv \frac{1}{2}A \times B$.

Слѣдствіе 2.

269) Понеже конусъ есть пирамида
безчисленное множество боковъ имѣющая, а
цилиндръ есть такаяжъ призма, слѣдова-
тельно и конусъ будетъ третья часть ци-
линдра. И такъ ежели діаметръ основанія
конуса будетъ $\equiv D$, а высота его $\equiv A$,
то толщина его будетъ $\equiv \frac{\pi A \times DD}{128}$.

ТЕОРЕМА 55.

270) Толщина части конуса
ABEF параллельно основанію отсѣчен-
ной $\equiv \frac{\pi}{128} (AB^2 + DB \times EF + EF^2) \times DC$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Толщина отсѣченной части про-
изойдетъ, ежели изъ цѣлаго конуса
ABD опишемъ конусъ EFD. Слѣдо-
вательно

запелъно полщина описанной части кону-
денъ $= \frac{\pi}{120} (AB \times VC - EF \times VD)$. (§ 269). Но
 $VD = VC - CD$, то будетъ $\frac{\pi}{120} (AB \times VC -$
 $EF \times VD) = \frac{\pi}{120} ((AB^2 - EF^2) \times VC + EF^2 \times DC)$.
Понимъ треугольникъ $\triangle AGE$ подобенъ
треугольнику $\triangle ACD$, и для того
 $AB - EF : DC = AB : VC$ и $VC = \frac{AB \times DC}{AB - EF}$.
Слѣдовательно полщина описанной
части конуса будетъ $= \frac{\pi}{120} (AB \times DC \times AB$
 $+ EF^2 \times DC) = \frac{\pi}{120} (AB^2 + AB \times EF + EF^2)$
 $\times DC$.

С л ѣ д с т в і е.

271) Изъ сего яствуетъ, коимъ
образомъ изъ данныхъ поперешниковъ AB и EF
и вышн. DC можно найти толщину опи-
санной части конуса.

О П Р Е Д ъ Л Е Н І Е 35.

272) Шаръ или сфера [sphaera] есть
поверхность порою протехоминъ описанной
полукруга ADB около диаметра AB ,
въ такомъ случаѣ диаметръ AD раз-
вѣдъ ось [axis], а точка A или B по-
люсъ [Polus]. Описанная сек-
тора

Fig.
130

шара АСМ произойдетъ пѣло называ-
емое *секторъ шара*.

Примѣчаніе.

273) Всякая точка окружности какъ М, когда полукружіе обращается, описы-
ваетъ кругъ, котораго радіусъ есть линія
МР, перпендикулярная къ оси АВ. И поне-
же линіи пѣмъ меньше становятся, чѣмъ
далѣе отстоятъ отъ центра С, самой боль-
шей кругъ будетъ, котораго плоскость про-
ходитъ чрезъ центръ С, а понеже пѣхъ
круговъ, которыхъ плоскости проходятъ
чрезъ центръ шара радіусы равны линіи
АС, и равны между собою, то всѣ сѣченія
шара чрезъ центръ С проходящія будутъ
равны между собою.

ТЕОРЕМА 56.

274) Шаръ равенъ пирамидѣ,
которой основаніе равно поперечно-
сти шара, а высота радіусу.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Представь себѣ, что поверхность
шара состоитъ изъ самыхъ малѣйшихъ
квадратовъ, такъ чтобъ всѣ сложен-
ные вмѣстѣ сославляли поверхность
шара.

шара. Изъ центра шара ко всѣмъ угламъ квадратовъ проводи прямыя линии, такимъ образомъ шаръ будетъ состоять изъ безчисленнаго числа пирамидъ, которыхъ высота будетъ одинака, и отъ радіуса бесконечно или столь малою частицею будетъ разниться, что самой радіусъ за высоту взять можно, а сумма оснований всѣхъ пирамидъ будетъ равна поверхности шара. Изъ сего яснѣваетъ, что шаръ будетъ равенъ пирамидѣ, которой основаніе равно поверхности, а высота радіусу шара.

ТЕОРЕМА 57.

275) Шаръ содержится къ цилиндру, котораго диаметръ основанія и высота равны диаметру шара такъ какъ 2 : 3.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Пусть будетъ квадратъ ABCD, въ которомъ изъ угла В какъ центра опиши четверть круга AGD, и проводи диагональную ВС. Еслии квадратъ и съ описанными въ немъ фигурами около линии АВ какъ около оси

Fig. 131

У 2

будетъ

будетъ обращаться , по квадратамъ обращеніемъ своимъ произведетъ цилиндръ , (§ 235) четверть круга ABD половину шара (§ 272) , а треугольникъ прямоугольной ABC конусъ (§ 268) . Всѣ сии тѣла пересѣки плоскостью EF параллельною боку AC , по разрѣзы будутъ круги . Круга , которой произойдетъ отъ разрѣзу цилиндра будетъ радиусъ EF , отъ разрѣзу шара будетъ радиусъ EG , отъ разрѣзу конуса радиусъ EL . И понеже разрѣзы суть круги , то будутъ содержаться между собою такъ какъ квадраты радиусовъ EF , EG и EL . Но понеже $EF = BD = BG \pm AC = AB$ и $AC : AB = EL : EB$, то будетъ $EB = EL$, и разрѣзы будутъ содержаться такъ какъ квадраты линей BG , и EB , но $BG^2 = EB^2 + EG^2$ (§ 198) , и сие не перемѣняеся , гдѣ ни пересѣки упомянутыя при тѣлахъ . Слѣдовательно полное тѣло , отъ обращенія квадрата произведетъ , равно тѣламъ отъ обращенія четверти круга и треугольника произшедшимъ . Но тѣло отъ обращенія прямоугольника произшедшее равно третей части тѣла отъ обращенія квадрата произшедшаго (§ 269) , слѣдовательно шаръ будетъ равенъ двумъ третей-

прямых цилиндра, или шаръ къ цилиндру содержится такъ какъ 2 : 3.

Слѣдствіе.

276) И такъ чтобы найти площадь даннаго шара, котораго діаметръ $= D$, сперва должно сыскать площадь цилиндра, котораго діаметръ основанія $= D$, и высота $= D$, площадь его будетъ $= \pi D^2$ (§ 254). Найденную площадь цилиндра надлежитъ умножить на $\frac{2}{3}$, и будетъ площадь шара $= \frac{\pi D^2}{3}$. По сему шары содержатся между собою какъ кубы діаметровъ.

ТЕОРЕМА 58.

277) Поверхность шара равна площади круга четырежды пятой радиусовъ шара описаннаго.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Пусть будетъ поверхность шара $= S$, діаметръ его $= D$, площадь его будетъ $= \frac{1}{2} D \times S$ (§ 274). Следовательно поверхность шара найдется, ежели площадь раздѣлимъ на шестую часть діаметра. Но площадь шара $= \frac{\pi D^2}{6}$ (§ 276), следовательно

У 3

поверх-

поверхность его будетъ $= \frac{\pi D^2}{4}$, а круга, котораго диаметръ D площадь $= \frac{\pi D^2}{4}$; изъ сего явствуетъ, что поверхность шара равна площади самаго большаго круга четырежды взятой.

Слѣдствіе 1.

278) По сему чтобъ найти шара поверхность надлежитъ сперва сыскать площадь круга самаго большаго, и ее умножить на 4. Произведеніе будетъ поверхность искомая и поверхности шаровъ содержащихся между собою какъ квадраты диаметровъ.

ЗАДАЧА 21.

279) Найти толщину сегмента шара происходящаго отъ обра-
 131 щенія фигуры EBDG.

рѣшеніе.

Въ § 275 доказано, что плѣло отъ обращенія параллелограмма BDEF происходящее равно плѣламъ отъ обращенія треугольника EBL, и фигуры EBDG производимъ. Слѣдовательно ежели изъ толщины цилиндра, котораго основаніе BD и высота EB

ЕВ вычтена будетъ полщина конуса отъ обращенія переугольника EBL производящаго, по останеется полщина сегмента шара отъ обращенія фигуры EBDG производящаго. Но полщина помянутого цилиндра $= \frac{\pi}{8} EB \times BD^2$ (§ 254) и полщина конуса $= \frac{\pi}{8} \times \frac{1}{3} EB \cdot EL^2$. Сверхъ сего $EL^2 = EB^2 - BG^2 - EG^2 = BD^2 - EG^2$. Откуда полщина конуса будетъ $= \frac{\pi}{8} \times \frac{1}{3} EB (BD^2 - EG^2)$, и искомая полщина $= \frac{\pi}{8} EB \cdot BD^2 - \frac{\pi}{8} \times \frac{1}{3} EB (BD^2 - EG^2) = \frac{\pi}{8} (2BD^2 + EG^2) \times \frac{1}{3} EB$. Изъ сего явствуетъ, что радиусы BD, EG и высота EB даны бытъ должны, чѣмъ найши полщину иъла отъ обращенія фигуры EBDG производящаго, которая произойдетъ, ежели площадь основанія два раза взятая, приложится къ площади верхняго круга, и сумма умножится на третью часть высоты.

Слѣдствіе 1.

280) Изъ параграфа 276 явствуетъ, что полщина половины шара будетъ $= \frac{\pi D^2}{12}$, гдѣ D означаетъ діаметръ шара, и ежели вмѣсто D положено будетъ AB, полщина полушара отъ обращенія четверти круга

ABD произшедшаго будетъ $= \frac{2\pi}{3\delta} AB^2$. Откуда ежели отнять сегментъ сферы отъ обращения фигуры **EBDG** произшедшей, останется полщина сегмента отъ обращения фигуры **AEG** произшедшаго, и произойдетъ искомая полщина $= \frac{2\pi}{3\delta} AB^2 - \frac{\pi}{3\delta} (2AB^2 + EG^2) \times EB$. но $EB = AB - AE$, то будетъ искомая полщина $= \frac{2\pi}{3\delta} AB^2 \times AE - \frac{\pi}{3\delta} EG \times EB$. Отсюда видно, что дано быть должно, чтобъ найти полщину тѣла, отъ обращения сегмента **AEG** происходящаго.

Слѣдствіе 2.

281) Ежели къ тѣлу отъ обращения сегмента **AEG** происходящаго, придана будетъ полщина конуса, которой раждается отъ треугольника **EBG**, то произойдетъ полщина сферическаго сектора. Но полщина сего конуса $= \frac{\pi + G^2 \cdot EB}{\delta}$. Слѣдовательно полщина сектора сферическаго отъ обращения фигуры **ABG** происходящаго будетъ $= \frac{2\pi}{3\delta} AB^2 \times AE$.

ЗАДАЧА 22.

282) Сыскать поперѣхность того тѣла, котораго въ § 279 полщина найдена.

рѣше-

РѢШЕНІЕ.

Понеже шаръ равенъ пирамидѣ , которой основаніе равно поверхности шара , а высота радиусу , то и секторъ отъ обращенія фигуры ABG происходящей будетъ равенъ пирамидѣ , котораго основаніе поверхность сферическаго сегмента , а высота радиусъ AB . Но ежели известна толщина такой пирамиды , то площадь основанія произойдетъ , ежели раздѣлена будетъ на пренію части высоты , а понеже толщина сферическаго сектора $= \frac{2\pi}{3} AB \cdot AE$, то площадь основанія или поверхность сферическаго сегмента будетъ $= \frac{\pi}{3} AB \cdot AE$, то есть равна прямоугольнику , котораго основаніе окружность круга , котораго діаметръ равенъ діаметру сферы , а высота равна высоте сегмента.

Слѣдствіе.

283) Когда известна поверхность сего сегмента , то и поверхность сегмента отъ обращенія фигуры $EBDG$ найти будетъ можно. Что зѣ въ литеры π и δ означаютъ выше сего изъяснено.



НАЧАЛЬНЫЯ ОСНОВАНІЯ
ПЛОСКОЙ ТРИГОНО-
МЕТРИИ.



ГЛАВА ПЕРВАЯ.

О НАИМЕНОВАНИЯХЪ ВЪ ТРИГОНОМЕТРИИ УПОТРЕБЛЯЕМЫХЪ.

ОПРЕДѢЛЕНІЕ 1.

1.

Тригонометрія латинская есть знаніе чрезъ Арифметическіе выкладки сыскивать треугольники, которые Геометрія черченіемъ находить.

Примѣчаніе.

2) Всякой треугольникъ составляющъ шесть частей, которыми опредѣляется; три бока и три угла. Въ Геометріи показано, что три части треугольника даны быть должны, чтобъ можно было начертить треугольникъ. Слѣдовательно въ Тригонометріи показано быть должно, какъ изъ данныхъ трехъ частей треугольника находить чрезъ выкладки другія его части. Когда даны будутъ только всѣ углы, то
известно,

извѣстно , что треугольника , то есть боковъ его опредѣлить не можно ; ибо треугольники равные углы имѣющіе , хотя и подобны будутъ , и ограничены боками пропорціи наальными ; однакожъ сколь велики должны быть бока опредѣлить не возможно. Слѣдовательно между данными тремя частями треугольника , не ошибно одинъ бокъ быть долженъ. Сверхъ сего , когда два угла даны будутъ , то не надобно , чтобъ третей данъ былъ , потому что онъ самъ собою будетъ извѣстенъ (§ 69 Геом:). По сему , когда даны только три угла , не можно почитать какъ только двѣ данныхъ частей треугольника.

3) Изъ Геометріи видно , что треугольникъ описать можно. 1) Когда даны будутъ два бока и уголъ между ими содержащейся. 2) Когда даны будутъ два угла и одинъ бокъ. 3) Когда даны будутъ всѣ три бока и 4) когда въ треугольникъ прямоугольномъ даны будутъ бока , которой нибудь изъ острыхъ угловъ составляющие. По сему главной предметъ тригонометрии долженъ быть рѣшить чепырѣ вышепомянутыя задачи. Что надлежитъ до того случая , о которомъ говорено въ § 86 Геометрии , то и здѣсь видно будетъ , что рѣшеніе онаго бываетъ сомнительно ; теперь слѣдующъ начала и основанія Тригонометрии.

опре-

ОПРЕДѢЛЕНІЕ 4.

4) Если изъ какой нибудь точки М окружности радиусомъ АС описанной проведется къ діаметру АВ перпендикулярная линия МР, то она называется синусъ [sinus] дугъ АМ и МВ или угловъ, которыхъ мѣра суть сии дуги, то есть угла АСМ и ВСМ, которые вмѣстѣ взяты дѣлають уголъ 180° содержащей.

Fig.
1.

ПОЛОЖЕНІЕ 1.

5) Если уголъ АСМ или дуга ему соответствующая, въ кругѣ котораго радиусъ $= 1$ называется ф то синусъ изображается слѣдующимъ образомъ: $\sin \phi$.

Примѣчаніе.

6) Изъ свойства круга видно, что линия МР тѣмъ меньше будетъ, чѣмъ меньше отстоитъ отъ точки А, такъ что ее на послѣдокъ отъ малѣйшей частицы окружности Аа различать не можно. По сему чѣмъ дуга АМ или уголъ АСМ меньше, тѣмъ синусъ его меньше будетъ, и когда уголъ АСМ дѣлается безконечно малымъ АСа, то

по синусу. Этой будетъ равенъ дугъ Aa , и наконецъ угла, которой $\text{---}0$, синусъ будетъ $\text{---}0$. Напротивъ того, когда уголъ $АСМ$ или дуга $АМ$ прибавляется, то и синусъ ея больше становится, и когда уголъ доидетъ до 90° или мѣра его будетъ четверть окружности, то синусъ его будетъ $СD$ равенъ радиусу, которой въ тригонометрія всегда полагается $\text{---}1$ и назывется синусъ *цѣлой* [sinus totus] и следовательно синусъ прямого угла будетъ $\text{---}1$.

7) Когда уголъ или дуга ему соответствующая будетъ больше становится прямого угла, то синусъ сего уменьшится, станетъ мѣры болѣе, чѣмъ уголъ будетъ болѣе 90° ; такъ синусъ угла $АСN$, какъ и угла NCB будетъ линия NQ , и напоследокъ синусъ угла 180° будетъ $\text{---}0$. По сему, ежели половина окружности, которой радиусъ $\text{---}1$ означается литерою π , то будетъ $\sin \pi = 0$, а $\sin \frac{1}{2}\pi = 1$.

8) Понѣже синусъ угла острого $АСМ$ равенъ синусу угла тупого $МСВ$, которой съ острымъ составляетъ 180° , и по одну сторону диаметра AB падаетъ; следовательно, ежели синусъ PM угла $АСМ$ взять будетъ за положительной то и тупого угла $МСВ$ синусъ будетъ положительной то есть должно означать знакомъ $+$. Ежели уголъ BCN названъ будетъ θ , то будетъ $NQ = \sin \theta$ и $\sin (\pi - \theta) = \sin \theta$.

9) Когда уголъ перешедъ предѣлъ 180° , будетъ увеличиваться, то синусъ его начнетъ больше становиться. Напримѣръ: синусъ дуги $ANBL$ или угла ACL будетъ линия RL , такъ какъ и дуги AEL или угла ACL , которой есть дополненіе къ прежнему до 360° . Но понеже RL падаетъ по другую сторону діаметра AB , то его должно почитать за отрицательной и означать знакомъ $-$. Если будетъ $ACM = BCL = \Phi$, то будетъ $PM = RL$, и синусъ дуги ANL , или угла $ACL = \pi + \Phi$ будетъ $= -\sin \Phi$, такъ какъ и угла ACL , котораго мѣра есть дуга AEL , синусъ будетъ $= -\sin \Phi$. Когда дуга ANL увеличиваясь будетъ на послѣдокъ равна дугѣ $ADBE = \frac{3\pi}{2}$ или уголъ будетъ равенъ тремъ прямымъ, то синусъ его будетъ линия CE ; и понеже она падаетъ по другую сторону діаметра AB , будетъ $\sin \frac{3\pi}{2} = -1$ и синусъ дуги AE , которая есть дополненіе части окружности $ANBE$ до 360° тусовъ, будетъ также $= -1$.

10) Изъ сего видѣть можно, что ежели уголъ ACK названъ будетъ θ , то синусъ дугъ $ANLK = 2\pi - \theta$ и AK будетъ $= -\sin \theta$; и наконецъ синусъ цѣлой окружности, или угла, которой въ себѣ содержитъ 360° , синусъ будетъ $= 0$, то есть $\sin 2\pi = 0$.

ОПРЕДѢЛЕНІЕ 3.

11) Прямая линия MF синусъ угла MCD , которой есть дополнение угла ACM до 90° или до угла прямого, называется *Косинусъ* [Cosinus] угла ACM , или понеже $MF=PC$; линия PC называется *Косинусъ* угла ACM , а часть радиуса AP называется *Синусъ* обращенной [Sinus versus] угла ACM .

ПОЛОЖЕНІЕ 1.

12) Если уголъ ACM означенъ будетъ литерою Φ , то косинусъ его и синусъ обращенной изображаются слѣдующимъ образомъ: $\cos\Phi : \sin. \text{ver}\Phi$.

Слѣдствіе. *ерм*

Лис 13) Понеже уголъ PMC есть прямой, то должно быть $PM^2 + PC^2 = MC^2$, но PM означаетъ синусъ цѣлой, которой всегда полагается $=1$, слѣдовательно всегда должно быть $\sin^2\Phi + \cos^2\Phi = 1$, $\sin\Phi = \sqrt{1 - \cos^2\Phi}$ и $\cos\Phi = \sqrt{1 - \sin^2\Phi}$. Изъ сего видно, что когда данъ будетъ синусъ какого нибудь угла можно найти его косинусъ, и ежели данъ будетъ косинусъ, можно найти синусъ тогожъ угла.

Примѣчаніе.

14) Линия PC увеличивается, когда уголъ ACM меньше становится, такъ что
когда

когда уголъ $АСМ$ будетъ $= 0$, линия $РС$ равна будетъ $АС$, то есть косинусъ угла, которой $= 0$, будетъ $= 1$: А когда уголъ $АСМ$ будетъ равенъ прямому, или $= \frac{1}{2}\pi$, то косинусъ его будетъ $= 0$, то есть $\cos \frac{1}{2}\pi = 0$.
 Если уголъ $АСМ$ будетъ больше прямого, то косинусъ его падая по другую сторону точки $С$, начнетъ прибавляться, какъ на примѣрѣ косинусъ угла $АСН$ будетъ линия $СQ$, и понеже $СQ$ по правую сторону центра $С$ на диаметрѣ падаетъ, то косинусъ угла тупаго должно означать знакомъ $-$, ежели косинусы по лѣвую сторону въ разсужденіи центра $С$ падающіе взяты будутъ за положительныя. Пусть уголъ $ВСН$ назовется θ , то будетъ уголъ $АСН = \pi - \theta$, и $\cos АСН = \cos(\pi - \theta) = -\cos \theta$. На послѣдокъ когда уголъ здѣлается равенъ двумъ прямымъ, или мѣра его будетъ половина окружности, то косинусъ его будетъ радіусъ $СВ$, но понеже по другую сторону точки $С$ падаетъ, то будетъ $\cos \pi = -1$.

15) Когда уголъ еще болѣе увеличиваться будетъ, то косинусъ его начнетъ уменьшаться. На примѣрѣ косинусъ угла $АСЛ$ будетъ линия $СR$ меньше, нежели $СР$, и понеже на диаметрѣ по правую сторону еще центра $С$ падаетъ, должно означать знакомъ $-$, ежели $СР = АСМ$ будетъ $= \phi$, то будетъ $\cos(\pi + \phi) = -\cos \phi$. На послѣдокъ когда уголъ отъ часу увеличиваясь здѣлаетъ

ся равенъ шремъ прямымъ, или мѣра его будетъ дуга $\frac{3\pi}{2}$, то косинусъ его будетъ $=0$, слѣдовательно $\cos \frac{3\pi}{2} = 0$.

16) Потомъ ежели уголъ перейдетъ и сей предѣлъ, то косинусъ начнетъ прибавляться, и понеже будетъ падать на диаметръ по лѣвую сторону въ разсужденіи точки С, то должно его почитать положительнымъ, и означать знакомъ $+$. Ежели будетъ $\angle ACK = 0$, то косинусъ угла $\angle ACK = 2\pi - 0$ или дуги $\angle ANK$ будетъ $\cos = 1$, и на концѣ будетъ $\cos 2\pi = 1$.

ОПРЕДѢЛЕНІЕ 4.

Fig. 2. 17) Ежели въ точкѣ А проведе-
дѣтся касательная линия, и въ обѣ сто-
роны продолжипся безъ опредѣленно ;
потомъ взявши на окружности круга
какую нибудь точку М изъ центра С
чрезъ оную проведется линия СТ, ко-
торая бы пересѣкла касательную Тт, ли-
ния АТ содержащаяся между точками
А и Т, называется *Тангенсъ* [Tangens]
угла АСМ или дуги АМ, а \angle ежели АСД
будетъ уголъ прямой, такъ чѣмъ
уголъ МСД былъ дополненіе прежняго
до прямого, называется *Тангенсъ* угла
МСД или *Котангенсъ* [Cotangens] угла
АОН. АСМ поло-

ПОЛОЖЕНІЕ 2.

18) Если угол ACM названъ Φ , тангенсъ AT и котангенсъ DI , въ кругѣ котораго синусъ Φ $\equiv 1$ изображается какъ слѣдуетъ $\tan \Phi$ и $\cot \Phi$.

Слѣдствіе.

19) Если изъ точки M къ диаметру AB , опустишь перпендикулярную линию MP , то будетъ треугольникъ CPM подобенъ треугольнику CAT , и $CP:PM=AC:AT$. Но AC синусъ Φ $\equiv 1$. Слѣдовательно будетъ $AT=\tan \Phi=\frac{\sin \Phi}{\cos \Phi}$. Такимъ же образомъ будетъ $\cot \Phi=\frac{\cos \Phi}{\sin \Phi}$. Слѣдовательно $\tan \Phi \cdot \cot \Phi \equiv 1$. По сему когда данъ будетъ синусъ какого нибудь угла, то найдѣвъ ко синусу тогожъ (6 13) можно будетъ найти его тангенсъ и котангенсъ.

Прикѣпаніе.

20) Если тангенсы угловъ, которые падаютъ по сторону D диаметра AB взяты будутъ за положительные, то тангенсы, которые будутъ падать по сторону E диаметра AB , должно брать за отрицательные. Подобнымъ образомъ котангенсы, которые падаютъ по сторону A диаметра DE считатьъ должно за положительные, а кото-

рые падаютъ по сторону В, за отрицательные.

21) Когда уголъ АСМ уменьшаться будетъ, то и тангенсъ его меньше становится, а котангенсъ увеличивается будетъ, такъ что угла очень малаго тангенсъ почти не будетъ разнствовать отъ синуса того же угла, и угла, которой $\text{---}0$, тангенсъ будетъ $\text{---}0$, а котангенсъ безконеченъ: Напротивъ того, когда уголъ увеличиваться будетъ, то и тангенсъ увеличивается, а котангенсъ меньше становится, и наконецъ, когда мѣра угла будетъ половиною окружности, то тангенсъ его будетъ безконеченъ, а котангенсъ $\text{---}0$, то есть $\text{tang}^1 \pi \text{---} \infty$ (∞ есть знакъ безконечной величины) $\text{cot}^1 \pi \text{---} 0$.

22) Когда точка взята будетъ на другой четверти окружности, и изъ оной чрезъ центръ къ касательной Тt проведется линия, то угла АСN тангенсъ будетъ Ат и понеже падаетъ по другую сторону диаметра, то оной должно почитать за отрицательной, такъ какъ и котангенсъ Dt, которой отъ точки D больше становится и падаетъ уже по другую сторону диаметра DE; Пусть уголъ NCB будетъ $\text{---}\theta$, то будетъ $\text{tang}(\pi - \theta) \text{---} -\text{tang}\theta$, и $\text{cot}(\pi - \theta) \text{---} -\text{cot}\theta$.

23) Когда точка N начавъ двигаться отъ точки А по окружности дойдетъ до точки

точки В, и угол АСВ будет равен двум прямым, тангенс его будет ∞ , а котангенс безконечен и при том отрицательной, потому что должен упасть по другую сторону диаметра DE, по сему $\text{tang} \pi = 0$; $\text{cot} \pi = -\infty$.

24) Если также точка далее по окружности двигаться будет, то тангенс угла АСм или дуги ANm будет увеличиваться, и понеже упадет по сторону D линии АВ, будет положительной, а котангенс уменьшаться будет; но понеже падает по сторону Q диаметра DE, то также должно почитать положительным. По сему, если назовется $\text{ВСм} = \text{АСм} = \Phi$, то будет $\text{tang}(\pi + \Phi) = \text{tang} \Phi$, $\text{cot}(\pi + \Phi) = \text{cot} \Phi$, и в точке Е тангенс дуги АВЕ или угла равного трем прямым будет отрицательной и безконечен, а котангенс ∞ , следовательно: $\text{tang} \frac{3\pi}{2} = -\infty$, $\text{cot} \frac{3\pi}{2} = 0$.

25) Когда точка еще далее двигаться будет, и угол будет больше трех прямых вместе взятых, то тангенс будет уменьшаться, а котангенс увеличиваться, однакож как тангенс так и котангенс будут отрицательные. Если положится $\text{АСс} = \theta$, то будет $\text{tang}(2\pi - \theta) = -\text{tang} \theta$, $\text{cot}(2\pi - \theta) = -\text{cot} \theta$. На конец когда угол будет равен четырем прямым, то тангенс и всей окружности будет ∞ , а котангенс положительной безконечен.

26) Изъ сихъ примѣчаній явствуетъ, какъ по синусамъ, косинусамъ, и тангенсамъ можно различать уголъ тупой отъ острого. Если нѣкоторая дуга въ кругѣ, котораго синусъ цѣлой радиусъ единицъ будетъ $\equiv \Phi$, то произойдетъ,

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{1}{2}\pi - \Phi\right) &= \cos\Phi & \cos\left(\frac{1}{2}\pi - \Phi\right) &= \sin\Phi \\ \sin\frac{1}{2}\pi &= 1 & \cos\frac{1}{2}\pi &= 0 \\ \sin(\pi - \Phi) &= \sin\Phi & \cos(\pi - \Phi) &= -\cos\Phi \\ \sin\pi &= 0 & \cos\pi &= -1 \\ \sin(\pi + \Phi) &= -\sin\Phi & \cos(\pi + \Phi) &= -\cos\Phi \\ \sin\frac{3}{2}\pi &= -1 & \cos\frac{3}{2}\pi &= 0 \\ \sin(2\pi - \Phi) &= -\sin\Phi & \cos(2\pi - \Phi) &= \cos\Phi \\ \sin 2\pi &= 0 & \cos 2\pi &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tan\frac{1}{2}\pi &= \infty & \cot\frac{1}{2}\pi &= 0 \\ \tan\left(\frac{1}{2}\pi + \Phi\right) &= -\cot\Phi & \cot\left(\frac{1}{2}\pi + \Phi\right) &= -\tan\Phi \\ \tan\pi &= 0 & \cot\pi &= \infty \\ \tan(\pi + \Phi) &= \tan\Phi & \cot(\pi + \Phi) &= \cot\Phi \\ \tan\frac{3}{2}\pi &= -\infty & \cot\frac{3}{2}\pi &= 0 \\ \tan(2\pi - \Phi) &= -\tan\Phi & \cot(2\pi - \Phi) &= -\cot\Phi \\ \tan 2\pi &= 0 & \cot 2\pi &= \infty \end{aligned}$$

О П Р Е Д Ъ Л Е Н І Е 5.

27) Линія СТ изъ центра круга Fig. чрезъ данную точку окружности М къ касательной Тт проведенная называется Секансѣ [Secans] угла АСМ, а линія Сі, ко-
торая

шорая къ котангенсу тогожъ угла проведена называется Косекансѣ [Cosecans].

Прикѣчаніе.

28) Свойствѣ синуса обращеннаго , секанса и косеканса здѣсь пространно не разыскиваю , для того что ихъ употребленіе рѣдко , и со всѣмъ безъ нихъ обойтись можно ; но только то объ нихъ присовокуплю , что для подобія треугольниковъ АСТ и СРМ , будетъ $PC : MC = AC : CT$, откуда $CT = \frac{1}{\cos \Phi}$; подобнымъ образомъ будетъ $CI = \frac{1}{\sin \Phi}$, и $\frac{CT}{CI} = \frac{\sin \Phi}{\cos \Phi} = \tan \Phi$

ТЕОРЕМА 1.

29) Синусы , косинусы , тангенсы , котангенсы , синусы обращенные , секансы , косекансы тогожъ угла , но въ разныхъ кругахъ , содержатся между собою такъ какъ радиусы , которыми круги описаны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Пусть будетъ уголъ АСМ , и дуги радиусами АС и ВС описанныя АМ₃ и ВN , слѣдовательно мѣры угла АСМ Fig. 3.
Φ ; будутъ

будуть дуги AM и AN . Синусы угла ASM будут MP и NQ , косинусы CP и CQ , тангенсы AT и BO , синусы обращенные AP и BQ , секансы CT и CO . Но понеже AT , PM , BO и QN перпендикулярны къ линей AC , всѣ будутъ параллельны между собою, и для того будетъ $CM : CN = PM : QN = CP : CQ$, но $CM = CA$ и $CB = CN$, будетъ $CA : CB = PM : QN = CP : CQ$ и $CA : CP = CB : CQ$. Сверхъ сего $CA : CA - CP = CB : CB - CQ$, то есть $CA : AP = CB : BQ$, при томъ $AC : CB = AT : BO = CT : CO$. Откуда явствуемъ, что синусы, косинусы, тангенсы, котангенсы, секансы, косекансы тогожъ угла, но въ разныхъ кругахъ, будутъ содержаться такъ какъ радиусы, къ которымъ относятся.

С л ъ д с т в і е.

30) По сему какой бы радиусъ взяли ни былъ, содержаніе известнаго синуса, косинуса, тангенса, котангенса и проч: къ радиусу всегда будетъ одинако, и оное какъ въ линияхъ такъ и въ числахъ изобразить аккуратно можно, откуда явствуемъ, что величина синуса цѣлаго зависитъ отъ произволенія.

Примѣ-

Примѣчаніе

31) радиусъ, какъ я уже выше упомянулъ, полагается отъ всѣхъ равенъ единицѣ, и раздѣляется на 10000000 равныхъ частей, чтобъ аккуратнѣйшія содержанія синусовъ къ цѣлому имѣть можно было. Содержанія всѣхъ къ цѣлому синусу числами изображенныя составляющъ таблицы синусовъ и тангенсовъ. Когда должно дѣлать выкладки, которыя большей точности требуютъ, то употребляются таблицы, въ которыхъ радиусъ на 10000000000 раздѣленъ полагается. Разные есть способы сочинять таблицы синусовъ и тангенсовъ, но самыхъ легкихъ здѣсь показать не можно, довольно, когда докажу нѣкоторыя предложенія, которыя не только къ сочиненію таблицъ путь показываютъ, но и во всѣхъ Тригонометрическихъ выкладкахъ немалую пользу приносятъ.

ТЕОРЕМА 2.

32) Если даны будутъ дуги, или углы Φ и θ , ихъ синусы и косинусы, то будетъ

Fig.
4.

$$\begin{aligned}\sin(\Phi + \theta) &= \sin \Phi \cos \theta + \cos \Phi \sin \theta \\ \cos(\Phi + \theta) &= \cos \Phi \cos \theta - \sin \Phi \sin \theta.\end{aligned}$$

ДОКА-

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Пусть будетъ $AC = r = 1$, дуга $AM = \phi$, $MN = \theta$. Изъ точки M къ радиусу AC проводи перпендикулярную линию PM , будетъ $PM = \sin \phi$, $PC = \cos \phi$. Потомъ изъ точки N къ радиусамъ AC и MC проводи перпендикулярныя линии NS и NQ , изъ которыхъ первая будетъ $NS = \sin \theta$ и $CS = \cos \theta$, а послѣдняя $NT = \sin(\phi + \theta)$ и $QC = \cos(\phi + \theta)$. Наконецъ проводи перпендикулярныя линии SR и ST , треугольникъ SNT будетъ подобенъ треугольникамъ SRC и MPC , и для того $MC:PM = SN:ST$ или $1:\sin \phi = \sin \theta:ST = \sin \phi \sin \theta$
 $MC:PC = SN:NT$ или $1:\cos \phi = \sin \theta:NT = \cos \phi \sin \theta$
 $MC:PM = CS:SR$, $1:\sin \phi = \cos \theta:SR = \sin \phi \cos \theta$
 $MC:PC = SC:RC$ $1:\cos \phi = \cos \theta:RC = \cos \phi \cos \theta$.
 Но $NQ = NT + SR$ и $QC = RC - ST$. Слѣдов:
 $NQ = \sin(\phi + \theta) = \sin \phi \cos \theta + \sin \theta \cos \phi$, и $QC = \cos(\phi + \theta) = \cos \phi \cos \theta - \sin \phi \sin \theta$.

Слѣдствіе 1.

33) Если будетъ $\phi = \theta$, то будетъ $\sin 2\phi = 2 \sin \phi \cos \phi$ и $\cos 2\phi = \cos^2 \phi - \sin^2 \phi$. Слѣдовательно, ежели данъ будетъ синусъ угла какого нибудь, то можно найти какъ синусъ такъ и косинусъ такого, которой вдвое его больше, потомъ эчетверо въ восемь разъ, и такъ далѣе.

Слѣд-

Слѣдствіе 2.

34) Понеже $\text{tang}(\Phi + \theta) = \frac{\sin(\Phi + \theta)}{\cos(\Phi + \theta)}$ (§ 19)

слѣдовательно будетъ $\text{tang}(\Phi + \theta) = \frac{\sin\Phi \cos\theta + \sin\theta \cos\Phi}{\cos\Phi \cos\theta - \sin\Phi \sin\theta}$.

Ежели числителя и знаменателя раздѣлить на $\cos\Phi \cos\theta$, произойдетъ $\text{tang}(\Phi + \theta) = \frac{\text{tang}\Phi + \text{tang}\theta}{1 - \text{tang}\Phi \text{tang}\theta}$.

Потомъ ежели будетъ $\Phi = \theta$, то произойдетъ $\text{tang} 2\Phi = \frac{2 \text{tang}\Phi}{1 - \text{tang}\Phi^2}$.

Откуда явствуетъ, какъ изъ даннаго тангенса угла какого нибудь можно найти тангенсъ угла, который вдвое его больше, вчетверо и далѣе.

ТЕОРЕМА 3.

35) Ежели даны будутъ двѣ дуги или угла Φ и θ , ихъ синусы и косинусы, то будетъ

$$\sin(\Phi - \theta) = \sin\Phi \cos\theta - \sin\theta \cos\Phi$$

$$\cos(\Phi - \theta) = \cos\Phi \cos\theta + \sin\Phi \sin\theta$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Пусть будетъ $AC = CB = 1$, дуга $AM = \Phi$, $MN = LM = \theta$, то будетъ дуга $AL = \Phi - \theta$. Потомъ ежели сверхъ того, что въ предвѣдущей теоремѣ учинено, изъ точки L къ поперешнику проведемъ перпендикулярную линію LX , то будетъ

депѣ $LX = SR - SI = \sin(\Phi - \theta)$ и $CX = CR + XR = \cos(\Phi - \theta)$. Понеже $MN = LM$, то должно быть $SN = SL$, $NT = SI$ и $LI = XR = ST$. Но выше сего найдено $SR = \sin \Phi \cos \theta$, $NT = SI = \cos \Phi \sin \theta$, $CR = \cos \Phi \cos \theta$, $ST = LI = XR = \sin \Phi \sin \theta$; то будетъ $LX = \sin(\Phi - \theta) = \sin \Phi \cos \theta - \cos \Phi \sin \theta$ и $CX = \cos(\Phi - \theta) = \cos \Phi \cos \theta + \sin \Phi \sin \theta$.

Слѣдствіе.

36) Понеже $\tan(\Phi - \theta) = \frac{\sin(\Phi - \theta)}{\cos(\Phi - \theta)}$ (36)
то будетъ $\tan(\Phi - \theta) = \frac{\sin \Phi \cos \theta - \sin \theta \cos \Phi}{\cos \Phi \cos \theta + \sin \Phi \sin \theta} = \frac{\tan \Phi - \tan \theta}{1 + \tan \Phi \tan \theta}$

Примѣчаніе.

37) Сія теорема сверхъ великаго употребленія въ Алгебраическихъ выкладкахъ не мало служатъ къ сочиненію таблицъ синусовъ, тангенсовъ. Въ дополненіе сей матеріи присовокуплю еще слѣдующія задачи.

ЗАДАЧА I.

38) Если какого нибудь угла или дуги даны будутъ синусъ и косинусъ, найти синусъ и косинусъ половины тогожъ угла.

РѢШЕНИЕ.

Пусть данной уголъ будетъ $\angle ASM$ Fig. 5.
 $\angle ASM = \Phi$, и даны будутъ $PM = \sin \Phi$ $PC = \cos \Phi$.
 Проведи хорду AM , и чрезъ точку Q , гдѣ
 хорда раздѣляется на двѣ равныя ча-
 сти, проводи изъ центра линію NC ,
 будетъ $AN = NM$, AM перпендикуляр-
 на къ линіи NC , (§ 98 Геом.) MQ бу-
 детъ синусъ дуги MQ или половины 111
 дуги AM , а QC ея косинусъ. Но по-
 нѣже PM и PC даны, то можно бу- PC
 деть найти $AP = AC - PC = 1 - \cos \Phi$ пола-
 гая синусъ угла $\angle APM = 1$, и въ преугодль- 111
 никѣ прямоугольномъ APM по Пифагоровой
 теоремѣ будетъ $AM^2 = AP^2 + PM^2 = 1 - 2\cos \Phi + \cos^2 \Phi + \sin^2 \Phi$. А понеже $\sin^2 \Phi + \cos^2 \Phi = 1$,
 то будетъ $AM^2 = 2 - 2\cos \Phi = 2(1 - \cos \Phi)$.
 Слѣдовательно $AM = \sqrt{AP^2 + PM^2} =$
 $\sqrt{2(1 - \cos \Phi)}$ и $\frac{1}{2}AM = AQ = MQ = \frac{1}{2}\sqrt{AP^2 + PM^2} =$
 $\sin \frac{1}{2}\Phi = \frac{1}{2}\sqrt{2(1 - \cos \Phi)} = \sqrt{\frac{1 - \cos \Phi}{2}}$. На-
 шедъ такимъ образомъ синусъ половины
 дуги или угла Φ , косинусъ онаго най-
 дется по § 13 $QC = \cos \frac{1}{2}\Phi = \sqrt{1 - \sin^2 \frac{1}{2}\Phi}$
 $= \sqrt{1 - \frac{1 - \cos \Phi}{2}}$.

Слѣдствіе.

39) Изъ сего явствуетъ, что еже-
 ли данъ будетъ синусъ какого нибудь угла,
 то

то можно найти синусъ и косинусъ половины, четвертой, осмой части и про. того же угла.

ЗАДАЧА 2.

40) Найти синусъ дуги содержащей въ себѣ одну минуту.

РѢШЕНІЕ.

Понеже бокъ шестигуольника регулярнаго въ кругѣ начерченнаго равенъ радіусу круга, то хорда дуги содержащей 60° будетъ \equiv радіусу, и синусъ дуги 30° будетъ \equiv половинѣ радіуса, то есть ежели положимъ синусъ цѣлой или радіусъ круга $\equiv 10000000$, то будетъ $\sin 30^\circ = 5000000$, и такъ по § 38 изъ даннаго синуса 30° можно будетъ найти синусъ угла 15° , потомъ $7^\circ 30'$, потомъ $3^\circ 45'$ и такъ далѣе пока не дойдешь до весьма малаго угла какъ напр: $52''$ $44'''$ 3^v 45^v , котораго найденной синусъ пусть будетъ $\equiv 1$, а косинусъ онаго почти равенъ будетъ радіусу. Понеже синусы весьма малыхъ угловъ или дугъ отъ самыхъ дугъ почти неразличимы, то будетъ какъ дуга къ дугѣ такъ синусъ первой дуги къ синусу

синусу второй, следовательно синус дуги 1' можно будет найти посылая: как дуга $52''$ $44'''$ $3''$ $45''$ к дуге 1', так к синусу одной минуты, которой найдемся $= 29,09$ и косинус $= 9999999$; а потом синусы и косинусы углов 2', 4', 6' и проч. а по § 32 можно будет найти синус 6', а потом 3' и проч.

Примѣчаніе.

41) Опредѣливши синус дуги одной минуты можно найти содержаніе окружности к диаметру слѣдующимъ образомъ: Понеже синус угла очень малаго почти не разнствуетъ отъ дуги, то такой синус можно взять за самую дугу. Следовательно цѣлая окружность будетъ состоять изъ 2909×360 такихъ частей, какъ 100000 составляютъ радиусъ или какъ 200000 составляютъ цѣлой поперешникъ. Следовательно диаметръ к окружности будетъ такъ какъ $2000000 : 2909 \times 360 = 2000000 : 62834400 = 100000 : 314172$, гдѣ первые четыре знака съ истинными сходятся. Если бы найденъ былъ синус дуги 1'', то бы подобнымъ образомъ точное содержаніе диаметра к окружности опредѣлено было, потому что чѣмъ меньше уголъ, тѣмъ синусъ его меньше разнится отъ самой дуги.

ГЛАВА 2.

О РѢШЕНИИ ТРЕУГОЛЬНИКОВЪ.

ТЕОРЕМА 4.

42) Во всякомъ треугольникѣ прямоугольномъ синусъ угла содержится къ синусу угла котораго нибудь изъ острыхъ, такъ какъ гипотенуса къ боку противолежащему помянутому углу.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Fig. 6. Пусть будетъ треугольникъ прямоугольной АСВ, и возьмемъ въ разсужденіе уголъ С. Пусть будетъ $СЕ = СМ = 1$, то есть синусъ угла: Ежели изъ М опустимъ перпендикулярную линію МР, то будетъ треугольникъ СРМ подобенъ треугольнику СВА, откуда $СМ : РМ = СА : АВ$, но $СМ = 1$ и МР синусъ угла МСР, слѣдовательно будетъ $1 : \sin МСР = СА : АВ$. Подобнымъ образомъ будетъ $1 : \sin САВ = СА : СВ$.

Слѣдствіе 1.

43) Проведи линію ЕТ, которая будетъ тангенсъ угла ЕСТ, и параллельна линіѣ

линей АВ, откуда произойдетъ $CE:ET = CB:AB$, но $CE=1$, и ET тангенсъ угла ЕСМ. (Слѣдовательно $1:\operatorname{tang} C = CB:AB$. Подобнымъ образомъ будетъ $1:\operatorname{tang} A = AB:CB$.

Слѣдствіе 2.

44) Если въ треугольникѣ какомъ нибудь АСВ изъ верьху А къ противолежа- Fig. щему боку проведена перпендикулярная ли- 7. ния AD, то будетъ $1:\operatorname{tang} CAD = AD:CD$ и $1:\operatorname{tang} BAD = AD:BD$ Изъ сего произой- ~~детъ~~ $\operatorname{tang} CAD:\operatorname{tang} DAB = DC:BD$.

ТЕОРЕМА 3.

45) Во всякомъ треугольникѣ Fig. АСВ стороны содержатся между собою 7. такъ какъ синусы угловъ сторонамъ противоположащихся.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Изъ верьху треугольника къ осно- ванию, ежели надобно продолженному, опуски перпендикулярную линию AD, то будетъ $1:\sin ACB = AC:AD$

и $1:\sin ABC = AB:AD$. (§ 42)

Откуда произойдетъ $AC \times \sin ACB = AB \times \sin ABC$, и по томъ

$$AC:AB = \sin ABC:\sin ACB.$$

ЗАДАЧА 3.

46) Изъ данныхъ двухъ угловъ треугольника и одного бока найти остъ прочие части треугольника по таблицамъ.

РѢШЕНИЕ.

Пусть въ треугольникѣ ABC даны
Fig. будутъ углы A и B и бокъ CB, то
8. будетъ извѣстенъ и претей уголъ ACB
по § 70 Геом. и для того прочие два
бока AB, AC опредѣлены будутъ по-
сылками $\sin A : \sin B = CB : AC$ и $\sin A : \sin C = CB : AB$, что помощью логарифмовъ
учинено будетъ слѣдующимъ образомъ:
Пусть будетъ $A = 61^\circ 15'$, $B = 94^\circ 20'$,
и бокъ данной $BC = 587$, 036, то бу-
детъ $C = 24^\circ 25'$ и

$$\lg \sin A = 9,9428543$$

$$\lg \sin C = 9,6163,82$$

$$\lg BC = 2,7686647$$

$$C \lg \sin B + \lg BC = 12,3850629$$

$$\lg \sin C + \lg BC - \lg \sin A = 2,4421386 = \lg AB$$

По сему бокъ AB будетъ $= 276,782$
и бокъ AC найдется слѣдующимъ об-
разомъ:

$$\lg \sin A$$

$$\sin A = 0,9428643$$

$$\sin B = 0,9987567$$

$$(\sin) \sin C = 2,7686647$$

$$\sin B + \sin C = 12,7674214$$

$$\sin B + \sin C - \sin A = 2,8245571 = \sin AC.$$

По сему бока AC будетъ = 667,663.

ЗАДАЧА 4.

47) Изъ данныхъ двухъ бо- Fig
ковъ AC и CB и угла которому ни-
будь изъ данныхъ боковъ противо-
лежащаго опредѣлить друга части
треугольника.

РѢШЕНИЕ.

Пусть въ треугольникѣ ACB дан-
ные бока будутъ AC и CB и уголъ дан-
ной A, по § 45 синусъ угла ABC най-
дется посылая $BC : AC = \sin CAB : \sin ABC$,
но понеже $\sin ABC = \sin CBE$, то когда
бока BC данному углу пропиволежа-
щей будетъ меньше другаго даннаго,
то сомнѣнію бываетъ подвержено ту-
пой ли и острой уголъ найденному
синусу соотвѣствующей брать дол-
жно, потому что по другую сторону
перпендикула CD проведена быть мо-
жетъ

36

жесть линия $CE = EB$. равнымъ образомъ, ежели бы въ треугольникѣ ACE даны были бока AC , CE и уголъ CAE , уголъ CEA найдется посылая $EC : AC = \sin CAB : \sin CEA$. Но понеже $\sin CEA = \sin ABC$, ежели будетъ $CB = CE$, то не извѣстно какой уголъ брать должно. Сие сомнѣніе развѣ тогда рѣшится, когда извѣстно будетъ тупоугольной ли или остроугольной треугольникъ рѣшенію дается. Пускъ будетъ ABC треугольникъ тупоугольной, въ которомъ $AC = 667, 663$; $BC = 587, 036$, и уголъ $A = 61^\circ 15'$, синусъ угла ABC найдется слѣдующимъ образомъ:

$$\begin{aligned} \log BC &= 2, 7686647 \\ \log AC &= 2, 8245571 \\ \log A &= 9, 9428643 \\ \hline \log AC + \log A &= 12, 7674214 \\ \log AC + \log A - \log BC &= 9, 9987567 = \log B. \end{aligned}$$

Которому въ таблицахъ соответствуетъ уголъ $85^\circ 40'$. Но понеже треугольникъ долженъ быть тупоугольной, уголъ боку AC противолежащей долженъ быть тупой или дополненіе найденнаго до 180° : то есть уголъ $ABC = 94^\circ 20'$. А ежели бы данъ

данъ былъ прямоугольникъ $АСЕ$, но бы
былъ уголъ $АЕС = 85^{\circ}, 40'$; по опция
частни прямоугольника найши уже не
трудно.

Примѣчаніе.

49) Изъ сего яствуетъ, что ска-
зано въ § 3. Но бывающіе случаи, въ которыхъ
помощію извѣстныхъ свойствъ треугольни-
ковъ сомнѣніе се отращается. 1) Если
данный уголъ будетъ самъ прямой или туп-
ой, тогда другіе не ошибивъ острые быть
должны. 2) Когда бокъ данной $ВС$ данъ ту
углу противолежащей будетъ больше, не-
жели другой данной бокъ $АС$; въ такомъ
случаѣ уголъ боку $АС$ противолежащей дол-
женъ быть менше угла $САЕ$, следовательно
ни прямой, ни прямой быть не можетъ,
следств. уголъ $САЕ$ будетъ острымъ. Если
напротивъ, бокъ $АС$ больше бoku $ВС$, а
и $СВ$, а уголъ данъ $А$; тогда въ рѣшеніи
никакого сомнѣнія не было.

50) Если случится, что логарифмъ
косинуса какого нибудь угла въ табли-
цѣ не совершенно сходившаго не находится,
то чтобы найти accuratѣйшей уголъ, дол-
жно поступать слѣдующимъ образомъ: Пусть
будетъ большей ближайшей логарифмъ найден-
ному $= A$, меньшей ближайшей $= a$, а на-
денной

денной α , тогда дѣлай слѣдующее тройное правило:

$$A - a : a - a = 60'' : q = \frac{(\alpha - a) 60''}{A - a}$$

Что дастъ число секундъ. Пусть будетъ логариѳму а соотвѣствующей уголъ Φ , то найденному соотвѣстствовать будетъ $\Phi + q$. Напримѣръ въ треугольникѣ ABC пусть будетъ $AB = 256$, $BC = 349$, уголъ $A = 55^\circ 25'$ уголъ C найдется посылкою

$$\begin{aligned} \lg BC &= 2,5185139 \\ \lg AB &= 2,4082400 \\ \lg \sin A &= 9,9155389 \\ \hline \lg AB + \lg \sin A &= 12,3237989 \\ \lg AB + \lg \sin A - \lg BC &= 9,8052850 = \lg \sin C \end{aligned}$$

и будетъ $A - a = 934$, $a - a = 228$ отсюда произойдетъ $q = \frac{(\alpha - a) 60''}{A - a} = 14''$, слѣдовательно уголъ $C = 53^\circ 31' 14''$ пошомъ найдется уголъ $B = 71^\circ 3' 46''$.

51) Если въ треугольникѣ прямоугольномъ дана будетъ Гипотенуза AC, и бокъ которой нибудь, напримѣръ CD, то Fig. 9. уголъ A найдется по § 45 посылая $AC : CD = 1 : \sin CAD$. Когда извѣстенъ будетъ уголъ A, то уголъ C и бокъ AD найти будетъ можно. Пусть будетъ $AC = 276,783$, $CD = 133,129$.

1AC

$$\begin{aligned} IAC &= 2,4421386 \\ ICD &= 2,1242726 \\ Iintot &= 10,000000 \\ ICB + Iintot &= 12,1242726 \\ \sin A &= 9,6821340. \text{Слѣдовательн. уголъ} \\ A &= 28^{\circ}, 45'. \end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 48.

52) Въ треугольникѣ какомъ Fig. нибудь непрямоугольномъ сумма ^{10.} двухъ боковъ $AB + AC$ содержится къ разности ихъ $AC - AB$, такъ какъ тангенсъ половины суммы угловъ помнянутымъ бокамъ противоположащихъ, къ тангенсу половины разности ихъ.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Изъ угла A треугольника ABC меньшимъ бокомъ AB опиши кругъ GBE , и будепъ, ежели CA продолжится до G , $AB + AC = GC$ и $AC - AB = EC$. Проведи линеею BE и ей параллельную CD , возми $AG = AB$, то будепъ уголъ GBE прямой и уголъ GDC также прямой, $ECD = EBC$ и BEG . ^{1385 =} Ежели DC взята будепъ за синусъ цѣлой, то BD будепъ тангенсъ угла DCB , а GD будепъ

дентъ тангенсъ угла DCG. Но понеже $GAB = ABC + BCA = ABE + AEB = AEB$, то будетъ $BEA = DCG$ половина суммы угловъ бокамъ АВ и АС пропиволежащихъ. Изъ точки С проведи СН параллельную линіѣ АВ, и другую СF, такъ чтобъ равна была СВ, и будетъ $BCN = ABC$, $GCD = HCD$, $BCE = FCD$, и $BCA = FCH$, слѣдовательно ВCF будетъ разности и BCD будетъ половина разности угловъ бокамъ АВ и АС пропиволежащихъ. Но треугольникъ GEB подобенъ треугольнику GCD, откуда произойдетъ

$$GC : EC = GD : BD \quad \text{или} \\ AB + AC : AC - AB = \text{tang. } \frac{1}{2}(ABC + ACB) : \text{tang. } \frac{1}{2}(ABC - ACB).$$

ЗАДАЧА 5.

Fig. 53) Изъ данныхъ двухъ бо-
го. когъ треугольника АВ, АС и угла
между ими содержащагося ВАС най-
ти другая части треугольника.

РѢШЕНІЕ.

Когда уголъ А извѣстенъ, то можно найти сумму угловъ ABC и ACB и ея половину, которая будетъ $= \frac{180^\circ - BAC}{2}$. Угла, которой такимъ образомъ

разомъ найденъ буденъ, возми изъ таблицъ тангенсъ, и дѣлай троинное правило. Какъ сумма данныхъ боковъ къ разности ихъ, такъ $\text{tang } \frac{1}{2}(180^\circ - \text{ВАС})$ къ четвертому пропорциональному, которое будетъ тангенсъ половины разности угловъ исконыхъ (§ 52). Найденную разность угловъ, ежели придашь къ половинѣ суммы исконыхъ угловъ, произойдетъ уголъ большому боку противоположащси В, а когда разность угловъ изъ половины суммы угловъ вычтешь, найдемся уголъ меньшей С. Пусть будетъ $\text{ВАС} = 94^\circ 20'$, $\text{АВ} = 276$, $783 : \text{АС} = 587$, 030, будетъ сумма угловъ $\text{АВС} + \text{АСВ} = 180^\circ - \text{ВАС} = 85^\circ 40'$, по сему $\frac{1}{2}(\text{АВС} + \text{АСВ}) = 42^\circ 50'$, $\text{АВ} + \text{АС} = 863$, 819, и $\text{АС} - \text{АВ} = 310$, 253 и будетъ

$$\begin{array}{r} 1(\text{АС} + \text{АВ}) = 2,2364227 \\ 1(\text{АС} - \text{АВ}) = 2,4917160 \\ \text{Itang} \frac{1}{2}(\text{АВС} + \text{АСВ}) = 9,9671225 \\ \hline 12,4588385 \\ \text{Itang} \frac{1}{2}(\text{АВС} - \text{АСВ}) = 9,5224198 \end{array}$$

Слѣдовательно $\frac{1}{2}(\text{АВС} - \text{АСВ}) = 18^\circ 25'$. Отсюда найдемся $\text{АВС} = \frac{1}{2}(\text{АВС} + \text{АСВ}) + \frac{1}{2}(\text{АВС} - \text{АСВ}) = 42^\circ 50' + 18^\circ 25' = 61^\circ$

$61^{\circ} 15'$ и $ACB = \frac{1}{2}(ABC + ACB) - \frac{1}{2}(\angle BC - ACB) = 42^{\circ} 50' - 18^{\circ} 25' = 24^{\circ} 25'$.
Теперь изъ прежнихъ предложеній бокаъ
BC опредѣлишь будетъ можно.

Слѣдствіе.

Fig. 54) Когда данной уголъ будетъ пря-
6. мой, то уголъ C найдется посылая $CB:BA = 1: \text{tang. } ACB$. Пустьъ будетъ $CB = 327$,
 $BA = 241$.

$$1CB = 2,5145477$$

$$1AB = 2,3820770$$

$$1\sin tot = 10,0000000$$

$$12,3820170$$

$$1\text{tang } C = 9,8674693$$

Слѣдовательно уголъ $C = 36^{\circ}, 23'$, и по 9
50 можно найти аккуратнѣйшее.

ЗАДАЧА 6.

Fig. 55) Изъ данныхъ трехъ боковъ
11. треугольника ABC опредѣлить углы
A, B и C.

РѢШЕНІЕ И ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Изъ угла A большому боку про-
тиволежащаго, разтвореніемъ самага
мень-

меншаго бока АВ опиши окружность $GBDE$, и пропни СА до окружности, буденъ $AC+AG=AB+AC$ и $EC=AC-AB$, по сему какъ CG такъ и CE будутъ извѣстны. Но понеже $CB:CG=CE:CD$ (§ Геом. 157) найдемъ также образомъ CD , потомъ $BD=BC-CD$ и ея половина буденъ извѣстна. Изъ центра А опусти перпендикулярную AF къ линиѣ BC , и произойдетъ треугольникъ прямоугольной ABF , въ которомъ бока АВ и BF извѣстны. Слѣдовательно по § 47, можно будетъ опредѣлить уголъ BAF , потомъ и прочія всѣ части. Пусть буденъ $AB=276, 783$, $AC=587, 026$ $BC=667, 663$. Найдется $CG=AC+AB=863, 819$; $CE=AC-AB=310, 253$.

$$CB=2,8245571$$

$$CG=2,9364227$$

$$CE=2,4917160$$

$$CG+CE=5,4281387$$

$$CG+CE-CB=2,6035816=CD,$$

$$\text{Слѣдовательно } CD=401,404. \text{ } CB-CD=BD$$

$$(\text{ }=266,259. \text{ и } BF=133,129.$$

Теперь по § 51 уголъ BAF найдется слѣдующимъ образомъ:

$$\lg A = 2,4421386$$

$$\lg F = 2,1242726$$

$$\lg \text{tot} = 10,0000000$$

$$\lg BAF = 9,6821340,$$

которому въ таблицахъ соотвѣстствуетъ уголъ $28^{\circ}, 45'$, слѣдовательно уголъ $BAF = 61^{\circ}, 15'$.

Примѣчаніе.

56) Если уголъ данъ будетъ не только въ градусахъ и минутахъ, но при томъ и секунды найдутся будутъ, то логарифмъ синуса такого угла помощью обыкновенныхъ таблицъ синусовъ и тангенсовъ можно будетъ найти дѣлая противную посылку той, которая въ § 50 предписана. Напримеръ пусть данъ будетъ уголъ $53^{\circ} 31' 14''$, котораго синусу соответствующей логарифмъ сыскать должно. Надлежитъ взять логарифмъ синусовъ, которые соотвѣствуютъ угламъ $53^{\circ} 31'$ и $53^{\circ} 32'$, сыскать ихъ разность 934 и посылать

$$60'' : 934 = 14'' : Q = 216.$$

Неизмѣнное пропорциональное число если при-
дать къ логариѳму, которой соотвѣст-
ствуетъ меньшему углу, то есть $53^{\circ} 31'$,
сумма будетъ логариѳмъ угла $53^{\circ} 31' 14''$
и найдется 9.9052938. Хотя какъ одинъ,
такъ

53°

такъ и другой способъ не со всѣмъ акку-
ратны , и пошому здѣсь отмѣнной найденъ
логарифмъ , нежели какъ тамъ полагается ,
однакожъ разность между ими будетъ весь-
ма мала , и для того въ случаѣ нужды сих
способы употреблять можно.



ПРИБАВЛЕНІЕ

содержащее

**НАЧАЛЬНЫЯ ОСНОВАНІЯ
ПРАКТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРІИ.**

...

... ..

... ..

...

предувѣдомленіе

Главное дѣло практической Геометріи состоятъ въ томъ , чтобъ на поверхности земной проводить прямыя линіи , мѣрять углы и линіи , изъ которыхъ другія по предписаннымъ въ теоретической Геометріи правиламъ находить должно ; отсюда видно , что въ теоретической Геометріи о начертеніи фигуръ предложенныя правила , сюды собственно принадлежать не могутъ , потому что поверхность земная разнится отъ поверхности , какую въ Геометріи себѣ представили. Хотя на поверхности земной различныя неравноспи находятся , и земля шаровидную фигуру имѣетъ , однакожъ всѣхъ не противно оную принявъ за плоскую и горизонтальную , потому что разстоянія , которыя въ практической Геометріи мѣряемъ , такъ малы , что безъ чувствительной погрѣшности можно представить , будто бы они на плоскости лежали Геометрической , и припомъ при мѣрѣніи угловъ и линіи въ практикѣ строгости

Геометрической ни коимъ образомъ удовлетворить не возможно.

Не безъ основанія противъ сего предпріятія можетъ учинено быть изъясненіе, что я не въ своемъ мѣстѣ о сей мапери говорить начинаю, по тому что точныя и совершенныя правила практической Геометрии, не на теоретической только основаніе имѣютъ, но на Механикѣ, Оптикѣ и Астрономіи: И я тогожъ мнѣня. Но чтобъ читатель видѣть могъ нѣкоторую пользу доказанныхъ въ теоретической Геометріи истинъ, и сколь суетно нѣхъ мнѣніе, которые думаютъ, что тонкости и развѣскиванія Математическія бесполезны, принявъ я намѣреніе занявъ нѣкоторыя изъ упомянутыхъ частей истинны, которыя всякому почти извѣстны, сообщить здѣсь начальныя основанія практической Геометрии и нѣкоторыя предложенія, которыя въ теоретической, чтобъ союзу не разорвать, опущены.

Понеже до практической Геометріи принадлежатъ проводить линіи, мѣрять углы и линіи, то порядокъ требуетъ, чтобъ прежде всего описать мѣры и инструменты при мѣрѣ-
ніи

ни употребляемые ; а попомъ уже какъ оными мѣрять должно , и какъ изъ данныхъ линей и угловъ неизвѣстныя находить. Все сіе какъ возможно короче предложивъ стараюсь буду не вступая въ тонкости ради того , что сего безъ помощи другихъ частей Математическихъ учинить не возможно : Помомъ къ просиранному описанию сихъ вещей , а особливо инструментомъ требуется цѣлая книга. Здѣсь намѣренъ я нѣсколько отступить отъ порядку , которой прежде мною наблюдаемъ былъ , потому что долженъ принять нѣкоторыя истинныя за доказанныя и извѣстныя , которыхъ здѣсь еще доказать не возможно.

$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

ГЛАВА ПЕРВАЯ.

О ПРОВЕДЕНИИ ПРЯМЫХЪ ЛИНЕЙ
НА ПОВЕРХНОСТИ ЗЕМНОЙ , И
МѢРЯНИИ ЛИНЕЙ И УГЛОВЪ.

I.

МѢряньи ни что иное есть, какъ находить содержаніе мѣры къ мѣряемому количеству. Слѣдовательно мѣра съ мѣряемымъ должна быть одинакаго роду. Мѣра линей должна быть линей , мѣра угловъ уголъ , мѣра плоскостей плоскость и проч. Углы мѣряются помощію окружности круга на части раздѣленной ; и понеже всякаго круга окружность раздѣляется на 360 равныхъ частей градусы называемыхъ , и круги всѣ подобны между собою , кака я бы окружность къ мѣрянію угловъ ни употреблена была ; мѣра угловъ всегда и вездѣ будетъ постоянна , разность только можетъ быть въ употребленіи инструмента. Но со всѣмъ дѣло иначе обстоитъ въ мѣряніи линей , пошому что не во всѣхъ мѣстахъ одинакой длины мѣра употребляется. И для того прежде всего приняты должны быть въ разсужденіе мѣры или маштабы и ихъ раздѣленія. Въ прочемъ желать должно , чтобъ всѣ народы со-

наасились употреблять одну и постоянную мѣру, чтобъ не послѣдовало со временемъ того, что съ мѣрами у древнихъ употребляемыми случилось, ибо есть что теперь о величинѣ ихъ подлиннаго ничего утвердишь не можно,

2) Сажень Геометрическая раздѣляется на 10 футовъ, футъ на 10 дюймовъ, дюймъ на 10 линей, линей на 10 скрупуловъ. Сажень означаетъ знакомъ ($^{\circ}$) футъ знакомъ ($'$), дюймъ знакомъ ($''$), линей знакомъ ($'''$), скрупулъ означаетъ знакомъ ($^{\vee}$); и такъ дѣленіе можно продолжать сколько угодно. Величина Геометрическаго фута зависитъ отъ произволенія, Всякая линей раздѣленная на 10 равныхъ частей можетъ взята быть за Геометрической футъ, десятая часть будетъ Геометрической дюймъ, сотая часть будетъ линей и тысячная часть скрупулъ. По сему три фута, семь дюймовъ и восемь линей Геометрическихъ изображены будутъ слѣдующимъ образомъ: $3'$, $7''$, $8'''$, или просто $378'''$. Не смотря на то, что сажень и футъ зависятъ отъ произволенія. Шагъ Геометрической имѣетъ постоянную и опредѣленную длину, а именно: пять Ренскихъ футовъ составляютъ шагъ Геометрической.

3) Хотя Парижской футъ, Ренской, Аглинской и всѣ прочія въ длину между

между собою разнствуютъ , однакожъ каждой раздѣляется на 12 дюймовъ , дюймъ на 12 линий. Линей Парижскаго футъ для точнѣйшаго содержанія къ прочимъ раздѣляется на 10 равныхъ частей , которыя пѣсочками называются , и въ футѣ будетъ ихъ содержаться 1440. Мѣра называемая у Французовъ Тоазъ состоитъ изъ 6 футовъ , Милъ Парижская содержитъ 17 селъ 2500 павъ въ , Милъ средняя Французская состоитъ изъ 2282 тоазовъ , И милъ мореплавателями Французскимъ употребляемая состоитъ изъ 2813 тоазовъ. Слѣдующая таблица показываетъ содержаніе Парижскаго футъ къ другимъ , или сколько такихъ частей Парижскаго футъ , которыхъ 1440 составляютъ цѣлой футъ , въ другомъ какомъ изъ слѣдующихъ содержится :

Слѣдующая таблица

футъ,			
Парижской	1440	Турецкой	3140
Римской	1391, 395	Болонской	1656
Греческой	1317	Галицкой	1773
Англинской	1351	Лейденской	1391
Шведской	1337	Гальской	1320
Датской	1403	Брюссельской	1278
Венеціанской	1540	Страсбургской	1281

4) Ренской футъ представленъ зѣвъ аккурашиѣ , потому что онъ употребительнѣе прочихъ. Въ росси употребляются Анг-

линскіе футы , и для того не бесполезн^а будеть и слѣдующая табличка :

1 верста	содержитъ въ себѣ	500 саж :
1 сажень	-	3 арш :
1 аршинъ	-	16 вершк :
1 сажень	-	7 Агл : фут :
1 Агаинская миля	-	5000 футовъ.

Задача . 1.

5) Если дано сколько въ разетол-
неніи АВ содержится футовъ , дюймовъ , ли-
ней и проч : парижскихъ или другой какой
Fig. мѣры, найти , сколько въ ней будетъ содер-
1. жаться футовъ , дюймовъ и линей другой
какой нибудь мѣры.

Рѣшеніе.

Чтобъ сію задачу рѣшить можно бы-
ло, должно напередъ знать содержаніе мѣръ,
которыя въ задачу входятъ , къ сему слу-
житъ сообщенная выше сего табличка. Пусть
лирея АВ содержитъ въ себѣ 125 Парижскихъ
футовъ, то сколько въ ней содержится фу-
твъ , дюймовъ , линей ренскихъ найдется
слѣдующимъ образомъ : Понеже Парижской
футъ раздѣляется на 1440 частей , число
такихъ частей въ линей АВ найдется по-
сылкою.

$$1 : 125 = 1440 : P$$

Най-

Найдется $P = 180000$. Теперь чтобы найти сколько въ той же линей будеть ренских футовъ , дюймовъ и линей посылай.

$1391,395 : 180000 = 1 : Q$ будеть $Q = 129,366$

Что означаетъ 1391,395 частей Парижскаго фута, составляють 1 ренской футъ , сколько здѣлають 180000 частей , четвертое пропорциональное число будеть $Q = 129,366$ ренск : мѣры. Подобнымъ образомъ должно поступать при другихъ случаяхъ. Положимъ вмѣсто даннаго числа литеру N , будеть

$1 : N = 1440 : P$
 $1391,395 : P = x : Q$
 и произ : $1391,395 : N = 1440 : Q$ (6 87 Арием.)

Откуда явствуетъ , какимъ образомъ дѣлая одно тройное правило задачу рѣшить можно.

Задача 2.

б) Отъ данной точки А къ точкѣ В Fig. провести прямую линию. 2.

Рѣшеніе.

Какъ прямая линия на бумагѣ проводится, всякому извѣстно. На доскѣ или на камнѣ дѣлается помощію нитки, мѣломъ на дѣленной , конюря , когда отъ данной точки до другой натянется , что приподнявши по

средиѣ

среди́хъ надлежитъ опуститъ , тогда отъ удару на доскѣ или на камнѣ здѣлается слѣдъ , которой будетъ требуемая линия.

На поверхности земной проводить линею нѣсколько труднѣе. Пусть будетъ точка А , отъ которой къ точкѣ В должно провести прямую линею. Для сего дѣйствія надлежитъ имѣть довольное число легкихъ , прямыхъ , равныхъ и на одномъ концѣ обостренныхъ колышковъ ; чтобъ способно было втыкать въ землю , вышиною по долѣ росту человѣческаго , когда на гладкомъ или не очень горбатомъ мѣстѣ прямую линею провести должно ; въ противномъ случаѣ вышина нѣкоторыхъ должна быть по состоянию мѣста. Вколотивши въ точкахъ А и В по колу , сколько можно вертикально , надлежитъ между ими въ точкахъ С, D, E и проч. въ небольшомъ одинъ отъ другаго разстоянн , наприкладъ въ тридцати или въ сорока саженахъ втыкать другіе , такъ чтобъ изъ за каждаго кола не видно было другихъ , или когда чрезъ колы А и В посмотрѣшь , то бы ни одинъ изъ среднихъ ни на которую сторону не выдавался. Тожъ должно разумѣть и о всѣхъ прочихъ. Изъ сего видно , что не преуесть , чтобъ колышки въ среднихъ точкахъ были вертикально поставлены. Когда между А и В глѣда по разстоянію довольное число кольевъ поставлено будетъ , то по точкамъ С, D, E, F отъ А къ В

деревку

веревку или цѣпь протянуть должно, которая прямою линією означать будетъ.

Примѣчаніе 1.

7) Если разстояніе АВ будетъ не велико и поверхность земли будетъ равна, то довольно въ точкахъ А и В утвердить по колу, и веревку протянувши отъ А къ В натянуть, которая будетъ означать на поверхности прямою линією.

8) Предложенной выше сего способъ хотя аккуратенъ, но медлителенъ нѣсколько будетъ, когда прямою линією должно протянуть на нѣсколько верствъ, напримѣръ пять, шесть или болѣе. Въ такихъ случаяхъ съ немалымъ успѣхомъ употребляются мишени, которыхъ напередъ описаніе сообщать должно. На дощечкѣ четвероугольной 3. мѣдной или деревянной MN по концамъ при-
дѣлываются подъ прямыми углами маленькія дощечки MQ и PN, изъ которыхъ на одной въ срединѣ дѣлается узинькая скважина hg, а на другой MQ прежней противоположащая ef пошире, и по самой срединѣ протягивается волосокъ рп. Такой инструментъ къ проведенію на поверхности земной прямыхъ линій употреблять можно слѣдующимъ образомъ: Пусть будетъ точка А, отъ которой къ точкѣ В должно провести прямую линією. Надъ точкою А должно поста-
вить

вишь на ношкѣ мишени, а почку В означить коломъ вертикальнымъ или другимъ какимъ знакомъ. Потомъ мишени MN въ такое привести положение, чтобъ знакъ въ точкѣ В поставленной, волосокъ въ мишени MQ и глазъ были на одной прямой линіи. Тогда укрѣпивши конецъ веревки или шнура въ точкѣ А, одинъ долженъ смотрѣть сквозь мишени на знакъ ВС, а другой долженъ натягивая сколько можно веревку прямо идти на знакъ ВС, и веревку тащить по землѣ за собою. Когда потъ, которой сквозь дышры смотритъ, примѣтитъ, что идущей съ веревкою человекъ, на которую нибудь сторону отдаляться начнетъ, то долженъ ему дать знакъ, въ которую сторону податься должно, чтобъ попасть на линію зрѣнія CQP. Такимъ образомъ, когда человекъ таща за собою веревку дойдетъ до положеннаго знака, то веревка будетъ означать прямую линію. Въмѣсто мишеней можно также употреблять и зрительныя пробки.

Задача 3.

9) Здѣлать масштабъ или размѣръ Геометрической.

Рѣшеніе.

Fig. 5. На прямой линіи возми десять равныхъ частей, и разстояніе, которое десять равныхъ частей занимаютъ, перенеси на линію

на линию AC , сколько разъ можно. Если кто довольствоваться хочетъ въ размѣрени десятистыми частями мѣры AB , то масштабъ уже и здѣланъ. Но ежели кто стараясь о точности и сотенныхъ частей оставить не хочетъ, тогдѣ къ линіи AC , подѣ какимъ нибудь угломъ, но способѣ подѣ прямымъ, поставитъ долженъ линію AG , и на оной взять по произволію десять равныхъ частей Aa, ae, ey и проч. Чрезъ каждую точку a, e, y и проч. провести параллельныя линіи AC , и на послѣднюю DF перенести десять такихъ же частей, на какія AB раздѣлена. Потомъ ежели проведешь линіи Ba, ib, ic, id и проч. даже до oD , то размѣръ или масштабъ Геометрической будетъ здѣланъ. И ежели AB означать будетъ сажень Геометрическую, то $B_1, 12, 23$ и проч.: будетъ означать футы, $1a$ одинъ дюймъ, $2e$ два дюйма, $3y$ три дюйма, и такъ далѣе.

Доказательство.

Что $B_1, 12, 23$ и проч.: означать будутъ футы, то всякъ видѣть можетъ. А понеже $1a, 2e, 3y$ и проч.: параллельны линіи aE , то будетъ $BE : B_1 = aE : 1a$, но $B_2 = \frac{1}{10} BE$. Слѣдовательно $1a$ будетъ $= \frac{1}{10} aE$. равнымъ образомъ доказано будетъ, что $2e$ два дюйма, $3y$ три и такъ далѣе. А ежели AB будетъ означать футовъ; $B_1, 12, 23$ и проч.: будутъ дюймы, $1a$ одна линія, $2e$ двѣ линіи, $3y$ три линіи и такъ далѣе.

Примѣ-

Примѣчаніе.

10) Для твердости и для способнѣйшаго употребленія такое раздѣленіе дѣлается на Металлической доскѣ, или на твердомъ деревѣ, и по такому масштабу вымѣряныя линей на бумагѣ кладутся.

Задача 4.

11) Прямую линейю вымѣрять.

Рѣшеніе.

Чтобъ линейю вымѣрять, надлежитъ прежде всего имѣть мѣру.

5.

1) Къ мѣрянно линей на бумагѣ проведенной будетъ служить вмѣсто мѣры въ предстоящей задачѣ зѣланной масштабъ, на примѣръ ежели бы должно было вымѣрять линейю MN, то поставя одну ножку циркула на точку M, другую надлежитъ раздвинуть до N, попомѣняв по длинѣ линей одну ножку циркула поставитъ на линей GR или QQ и смотрѣть гдѣ другая упадетъ. Поможитъ, что когда одна ножка поставлена будетъ на QQ другая упадетъ гдѣ пересѣкаются себя линей zd и dd, и АВ означаетъ фуны, то линей MN будетъ 2', 3'', 4'''.

2) Для мѣрѣнія линей на поверхности земной проведенныхъ должно имѣть веревку б. известной длины, или способѣ цѣпь изъ равныхъ звеньевъ состоящую АВ, по тому что веревка отъ влажности короче спавивается, а въ сухую погоду растягивается. Когда проведенную линейю должно мѣрять на такомъ мѣстѣ, гдѣ поверхность земли равна или не очень горбата, мѣрительную веревку или цѣпь должно по землѣ протягивать параллельно съ веревкою, которая линейю означаетъ. Длина мѣрительной веревки будетъ показывать сколь велико отъ одной точки до другой разстояние, и мѣрительную цѣпь или веревку съ мѣста на мѣсто должно переносить по тѣхъ поръ, пока не вымѣрно будетъ все назначенное разстояние.

3) Если поверхность земли будетъ горбата, то вѣрнѣе линейю вымѣрять можно, если линейя назначится кольями вертикальными, и веревку или мѣрительную цѣпь по всткнувшимся кольямъ протянешь, такъ чтобъ концы ея не только съ крайними, но и съ средними кольями дѣлали углы прямые; но понеже ни веревку ни цѣпь не можно такъ натягивать, чтобъ вся была въ горизонтальномъ положеніи, то для опроверженія сего недостатку должно имѣть легинькіе развилики, которые между кольями ставить, и по нимъ мѣрительную цѣпь или веревку протягивать должно.

Примѣчаніе 1.

12) Когда линею мѣрять случится на ровномъ мѣстѣ, то вмѣсто мѣрительной веревки или цѣпи для вѣрности употребляются шестики длиною сажени въ двѣ или три, потому что они не подвержены перемѣнамъ, которыми веревки бывають подвержены, и не причиняють замѣшательства, которыя бывають отъ мѣрительной цѣпи. Последней случай мѣрять линею по вертикальнымъ кольямъ покажется, можеть быть, труденъ, потому что коль поставитъ вертикально и трудно и долго времени на то требуется. Но при семъ примѣчать надлежитъ, что хотя колья отъ вертикальнаго положенія на одинъ, два или три градуса отстоятъ будучь, однакожъ чувствительной погрѣшности въ мѣрѣніи линей произвести не могутъ. Чтوبъ о семъ удостовѣ-

Fig. ритьсѣя, положимъ, что разстояние AC вы-

7. мѣрять должно, которое содержитъ въ себѣ десять сажени, и при томъ, что въ точкѣ C коль поставленъ вертикально, а въ точкѣ A коль AG отъ вертикальнаго положенія отдаленъ на одинъ градусъ. Такимъ образомъ вмѣсто AC мѣряемъ линею EF, которая съ коломъ AG дѣлаетъ уголъ прямой; слѣдовательно и уголъ DEF будетъ $= 1^\circ$. По сему изъ треугольника EDF найдемся линия EF посылкою.

$$\sin KFD : \sin tot = ED : EF.$$

И понеже

И понеже ED почти ничѣмъ не разнится отъ AC , то въ упомянутой посылкѣ вмѣсто ED можно положить AC , откуда

$$\begin{aligned} IAC &= 1,0000000 \\ \text{Или tot} &= 10,0000000 \\ \hline &11,0000000 \\ \text{Или EFD} &= 9,9999338 \\ \hline IEF &= 1,0000662 \end{aligned}$$

Которому логариѣму соотвѣствующее число найдемъ 10,0015; следовательно на десяти саженьхъ въ семъ случаѣ погрѣшность будетъ 1000 саж. Положимъ, что на разстоянн 1000 сажень колъ отъ кола спавленъ въ десяти саженьхъ, и каждой колъ въ ту же сторону отъ вертикальнаго положенія отстоитъ на 1°, то погрѣшность не болѣе будетъ, какъ $\frac{1}{10}$ саж. которую въ практикѣ презрѣть можно.

13) Линей ED меньше, нежели AC , по сему ежели бы въ посылкѣ положить истинную длину линей ED , то бы погрѣшность еще менѣе произошла. Но колъ отъ кола почти никогда такъ близко ставить иѣтъ нужды, обыкновенно ставятся дружка отъ дружки въ 30 или 40 саженьхъ. Въ такомъ случаѣ и большую въ углахъ ошибку презрѣть можно. Чтобы се показать, положимъ что колъ AG отстоитъ отъ кола CD на 40 саж. и AG отъ вертикальнаго

каднаго положенія отстоятъ на 3° , а колъ CD поставленъ вертикально. Чѣмъ найти линію EF, которую дѣйствительно въ мѣсто линіи AC мѣряемъ, должно посылать какъ прежде

$$\begin{aligned} \sin EFD : \sin tot &= AC : ED. \text{ f} \\ 1 AC &= 1.6020600 \\ 1 \sin tot &= 10.0000000 \\ \hline &11.6020600 \\ \sin EFD &= 9.9924044 \\ \text{f. 21} \quad ED &= 1.6026556 \end{aligned}$$

Которому соответствующее число найдется 40,554. Следовательно погрѣшность будетъ $\frac{54}{1000}$ саж. И ежели положить, что при мѣрѣніи разстоянія около 1000 саж. или двухъ верстъ колъ отъ кола ставленъ въ 40 саженьхъ, и каждой колъ выключая послѣдней отъ вертикальнаго положенія отстоятъ на 3° и въ одну сторону, то мѣря такимъ образомъ линію погрѣшность произойдетъ $1\frac{1}{4}$ или почти $1\frac{1}{4}$ сажени, которую на такъ великомъ разстояніи презрѣть можно. Въ практикѣ за шестое должно почитать, когда кто въ мѣрѣніи линіи около 1000 сажень не болѣе ошибется, какъ на сажень. Погрѣшность еще менѣе произойти должна, ежели колья не въ одну, но въ противныя стороны отъ вертикальнаго положенія отстоять будутъ. Откуда слѣдуетъ, что при семъ случаѣ не требуется, чѣмъ колья находи-

находились точно въ вертикальномъ положеніи , и что въ постановленіи кольевъ можно положиться на одни глаза.

Примѣчаніе 2.

14) Если кто въ постановленіи кольевъ въ вертикальное положеніе на глазомѣръ положиться не хочетъ , то въ выше сего упомянутой точности можетъ удовлетворить слѣдующимъ образомъ: Надлежитъ имѣть четверугольную , прямую , пустую призму , у которой съ двухъ боковъ вставлена слюда. Конецъ ея , которой втыкать должно , сколько возможно долженъ быть широкъ , какіе будутъ у кольевъ Геометрическихъ , или нѣсколько поменьше. По бокамъ внутренней поверхности призмы слюденнымъ противолежащимъ должны проведены быть вертикальныя линіи , и внутри въверху на тонкой ниточкѣ привязана гирька. Если призма надъ тѣмъ мѣстомъ , гдѣ колъ поставить должно , въ такое приведена будетъ положеніе , что въ отвѣсѣ въ призмѣ или затараживалъ вертикальныя на бокахъ линіи или съ обѣими висѣлъ параллельно , тогда призму колотить должно въ землю. Помощь ежели на мѣсто ея поставленъ будетъ простой колъ , то и онъ отвѣс вертикальнаго положенія весьма мало , а иногда ни сколько разнствовать не будетъ.

15) Къ тому жъ намѣренію или лучше сказать къ познанію, не далеко ли отстоитъ колъ отъ вертикальнаго положенія, можетъ служить слѣдующей инструментъ:

Fig. 6. Должно имѣть четвероугольную доску $ABEF$, линеею DC раздѣленную точно на двѣ равныя части длиною въ фунтъ или по долъ, толщиною такую, чтобъ на боку можно было зѣлать ложбинку $aAEa$, въ которую бы колъ свободно входилъ могли. Изъ точки D на плоскости AF описать дугу ef , и отъ того мѣста, гдѣ линия DC дугу пересѣкаетъ, раздѣлить дугу какъ въ ту, такъ и другую сторону на градусы. Сверхъ сего въ точкѣ D на шпилькѣ привѣсиль отъ вѣсъ. Когда такая доска съ двухъ противныхъ между собою сторонъ къ воткнутому колу ложбиною приложится, то по отвѣсу видно будетъ въ вертикальномъ ли колъ положеніи, и сколько отстоитъ отъ вертикальнаго. Если наклоненіе его къ горизонту будетъ такъ велико, что чувствительную погрѣшность произвестъ можетъ, то должно будетъ поправить, а въ противномъ случаѣ оставить его въ своемъ положеніи.

Примѣчаніе 3.

16) Чтобъ сей образецъ мѣрять линіей былъ способнѣе и вѣрнѣе можно при всякомъ колѣ и развилкахъ помощію отвѣса испытать разстояніе прошланной веревки отъ поверхности

сти земной , и наклоненіе кола къ горизон-
ту наблюдая при томъ шо , чтобъ помяну-
тыя разстоянія немного разнствовали между
собою , потому что мѣряемая линия пола-
гается Горизонтальная. Остается при семъ
способѣ одно препятствіе , которое отъ вѣн-
ру послѣдовать можетъ , но отъратить сего
другимъ образомъ не возможно , кромѣ того ,
чтобъ колья вколачивать нисверже въ землю.
Въ прочемъ вообще о всѣхъ практическихъ
дѣйствіяхъ примѣчать надлежитъ , что глав-
ное дѣло искуснаго геодезиста состоитъ въ
томъ , чтобъ умѣлъ узнавать , какія по-
грѣшности при разныхъ обстоятельствахъ
отъ разныхъ способовъ произойти могутъ ,
и чтобъ имѣлъ искусство , какъ бы сказать ,
оныя цѣнить или мѣрять ; чего ни отъ од-
ной теории , ни отъ одного упражненія , но
отъ обѣихъ вмѣстѣ надѣяться должно.

Примѣчаніе 4.

17) Всѣ тѣла отъ холоду сжимаются ,
а отъ тепла разпространяются. По сему , изъ
какой бы матеріи мѣра ни была здѣлана пере-
мѣнамъ отъ тепла и стужи будетъ под-
вержена. Опытами изслѣдовано , что вся-
кое дерево , а особливо Американскія де-
рева меньше перемѣнамъ бывають подвѣр-
жены , нежели самые твердые металлы.
Откуда имѣемъ другую причину предпо-
честъ въ мѣрѣннхъ деревянные шестики всѣмъ
прочимъ мѣрамъ. Когда въ мѣрѣннхъ тре-
буется

буется крайняя точность, по надлежитъ въ разсужденіе принимать прибавленіе или убавленіе въ мѣрѣ, которое отъ тепла или холоду происходитъ. Но о томъ разсуждать какъ узнавать на сколько мѣра во время дѣйствія прибавилась или убавилась, и прибавленіе или убавленіе принимать заѣсь въ разсужденіе нѣтъ нужды. Между тѣмъ не можно преминуть, чтобъ не показывать способу какъ находить мѣру будучи въ отдаленномъ мѣстѣ, или когда случится какимъ нибудь образомъ оную потерять.

18) *Отяѣсъ простой* [pendulum simplex] есть малинкой кусочикъ тяжелаго метала на тоненькой ниткѣ или волоскѣ привѣщенной. Напримѣръ, ежели на одномъ концѣ шелчинки *CP* привязанъ будетъ малинкой свинцовой шарикъ, а другимъ концомъ шелчинка прицѣплена будетъ за крючекъ, то *CP* будетъ простой отяѣсъ. *Длина отяѣса* есть разстояніе отъ точки *C* до центра шарика, или когда шарикъ будетъ весьма малъ въ разсужденіи длины *CP*, то длиною отяѣса можно называть разстояніе отъ точки *C* до шарика. Когда такой отяѣсъ качаться понужденъ будетъ, чтобъ по обѣимъ сторонамъ описывалъ не большія дуги *MP* и *NP*, то движеніе его по дугамъ *MP* и *PN* вмѣстѣ взятое называется *размахъ* или *качаніе* [Oscillatio]. О такихъ отяѣсахъ въ Механикѣ доказывается, что ежели ихъ пону-

покудить качаться въ безвоздушномъ мѣстѣ по небольшимъ дугамъ , по длинѣ разныхъ отвѣсовъ содержатся между собою обратно къ кв. квадраты чиселъ размаховъ въ равное время совершившихся , т. е. ежели , отвѣсъ котораго длина $= L$, въ извѣстное время совершаетъ число N размаховъ , а другой , котораго длина $= l$, въ то же время совершаетъ M размаховъ : то будетъ

$$L:l = \frac{1}{N^2} : \frac{1}{M^2}$$

или $L:l = M^2 : N^2$.

Откуда явствуетъ , изъ данныхъ въ сей пропорціи трехъ штерминовъ можно найти четвертой. По опытамъ извѣстно , что отвѣсъ , котораго длина $= 3\frac{1}{2}$ ренск. фута , въ одну секунду одинъ размахъ совершаетъ , слѣдовательно въ минуту 60 и въ двѣ 120 совершитъ размаховъ , и такъ далѣе. Положимъ теперь , что длина отвѣса по произволѣнью взятаго $= x$, и пусть сей отвѣсъ въ одну минуту совершаетъ 50 размаховъ , въ двѣ 100 размаховъ , то длина его въ ренскихъ футахъ найдется посылакою

$$(100)^2 : (120)^2 = 3\frac{1}{2} : x.$$

Откуда произойдетъ $x = \frac{360 \times 9}{25 \times 6} = \frac{6 \times 19}{25} = 4\frac{14}{25}$
 ренск. фут. $= 4' 6'' 8'''$.

По сему можно узнать величину Ренскаго фута , потомъ и всѣхъ прочихъ , которыхъ содержаніе къ Парижскому сообщено въ § 3.

19) Не можно сказать, чтобъ предложенной способъ находить величину какого нибудь фута, былъ Геометрически вѣренъ, потому что отъѣсъ длиною въ $3\frac{1}{2}$ Ренск: фут: въ секунду одинъ размахъ совершаетъ въ безвоздушномъ мѣстѣ, какое на полѣ едва имѣть можно, ни часовъ такъ аккуратныхъ, которыхъ бы ходъ былъ равномеренъ. Потомъ по разнымъ отъ экватора разстояніямъ, по разному градусу тепла и холоду длина отъѣса въ одну секунду одинъ размахъ совершающаго переменяется. Гдѣ крайняя точность требуется не только сіи, но и другія обстоятельства въ разсужденіе приниматьъ должно. А при размѣрѣніи пашенъ и полей выше сего упомянутой способъ безъ всякаго сомненія употребитъ можно, лишь бы только были часы карманные, которыхъ ходъ минушы чрезъ двѣ или три былъ равномеренъ. Въ прочемъ, ежели ни какихъ часовъ въ готовности не случится, то къ размѣренію времени можетъ служить движеніе крови здороваго человѣка, потому что примѣчено, что въ здоровомъ человѣкѣ одно бѣненіе жилы въ одну секунду совершается, или какъ нѣкоторые утверждаютъ въ одну минушу жила 80 бѣненій совершаетъ.

Задача 5.

20) На плоскости описать кругъ.

Рѣше-

Рѣшеніе.

Какъ на бумагѣ описывается кругъ Fig. того раз.ѣ тому не извѣстно, кому цирку-ла видѣть не случилось. На полѣ описывать его не тратьте. Положимъ, что изъ С радиусомъ СЕ должно описать кругъ. Въ точкѣ С надлежитъ крѣпко утвердить малинкой колышекъ, и къ нему привязать конецъ веревочки, такъ чтобъ она около его свободно вертѣться могла: На другомъ концѣ веревки надобно привязать другой острый колышекъ, въ такомъ разстояніи, сколь великъ радиусъ данъ будетъ, потѣмъ натянувши веревку острымъ концемъ на поверхности земной можно будетъ описать окружность.

Примѣчаніе 1.

21) Для вѣрности, чтобъ при описываніи окружности колышекъ AD не покрывался внутри или внѣ круга, надлежитъ къ помянутому колышку, которымъ окружность на землѣ означена была имѣти, привязать въ двухъ мѣстахъ веревочку FBD, и къ ней уже отъ кола С веревочку ВС, такимъ образомъ, когда колышекъ AD между почками F и D взятъ будетъ, и веревочки натянуты, то онъ при описаніи окружности начальнаго своего положенія перемѣнишь не можетъ.

22) Когда уже извѣстно, какъ списывать дугу на поверхности земной, какъ проводить и мѣрять прямую линейю, то къ рѣшенію задачъ, которыя въ теоретической Геометріи помощію линей и круга рѣшены, и на поверхности земной шѣ же способы употреблять можно. Какъ напримѣръ: Изъ данныхъ трехъ линей, изъ которыхъ каждая меньше, нежели двѣ прочія имѣютъ изъ нихъ, описать треугольникъ. Съ одного мѣста на другое перенести данной уголъ. Данной уголъ или линейю раздѣлить на двѣ равныя части, и прочія симъ подобныя. По сему должны бы теперь слѣдовать задачи, которыя собственно принадлежатъ къ практической Геометріи. Но сего учинить не можно прежде, нежели сообщено будетъ описание и употребленіе инструмента, которымъ углы на полѣ мѣряются.

Примѣчаніе 2.

23) Инструментъ по большей части къ размѣренію угловъ на полѣ употребляемый называється *Астролябіа* [Astrolabium] Fig. мой. Много и другихъ къ сему намѣренію отъ ученыхъ людей изобрѣшено, но я объ оныхъ умалчиваю, потому что астролябіи предъ всѣми прочими въ практической Геометріи употребляемыми въ точности должно отдавать преимущество. Она состоитъ изъ мѣнаго круга *AFBD*, котораго окружность раздѣле-

на на 360° , и каждой градусъ, ежели величина окружности позволяет, раздѣляется на четыре и иногда и на шесть равныхъ частей. По сему въ первомъ случаѣ каждая часть будетъ въ себѣ содержать $15'$, а въ другомъ $10'$. По концамъ неподвижнаго поперешника АВ, на которой нибудь сторонѣ, дѣлаются гнѣзда или мѣста для дюппирѣ, которыя вставляють и снимають можно. На другомъ поперешникѣ FE около центра движущемся для другой полсбной пары дюппирѣ дѣлаются подобныя мѣста. Въ центрѣ астролябіи для познанія странъ свѣта на движимомъ поперешникѣ придѣлывается компасъ, чтобъ и онъ вмѣстѣ съ поперешникомъ FE около центра обращаться, и снятъ быть могъ. На третьемъ поперешникѣ DM означается линия DM, которая бы чрезъ точку D, которой на окружности 90° соотвѣтствуютъ, чрезъ центръ астролябіи, и чрезъ точку M, гдѣ 360° означены, проходила. Съ такимъ приборомъ кругъ кладется на троеножную и раздвижную подставку GIKL, которая въ верху имѣетъ яблоко, чтобъ плоскость астролябіи во всякое положеніе привести можно было. Въ низу подъ яблокомъ противъ самаго центра астролябіи приѣшивается на ниточкѣ ошѣсъ, которой бы показывалъ на землѣ точку, надъ которою центръ астролябіи стоять долженъ. Въ строеніи яблока и другихъ нѣкоторыхъ частей бываетъ различность, но о семъ говорить,

ворить нѣтъ нужды. Чѣмъ каждой градусъ на шесть частей или болѣе дѣлится неужно было, къ концу поперешника, на которомъ движущіяся діоптры находятся, прилѣпляется дуга, которая бы на окружности астролябии занимала дугу 11° , а сама бы раздѣлена была на 12 равныхъ частей. Сей способъ мѣрять и дѣлится углы называется

ебч Ноній отъ изобрѣтателя, которому имя было Ноній [Nonius]. Помощію сей дуги уголъ точно можно вымѣрять даже до $5'$ безъ всякаго дѣленія градусовъ на части. Причину такой точности и употребленіе лучше можно показать на самомъ дѣлѣ, нежели изъяснить словами.

24) О діоптрахъ примѣчать надлежитъ: 1) Чѣмъ линия чрезъ волосокъ одной діоптры и узинькую скважину другой проведенная чрезъ самой центръ астролябии проходила. 2) Что глазомъ смотрѣть должно сквозь діоптру, въ которой узинькая скважина находится. 3) Что въ діоптрѣ, въ которой находится вертикальной волосокъ протягивается другой къ прежнему подъ прямымъ угломъ, т. е. горизонтальной, а въ другой діоптрѣ прошивъ самой точки, гдѣ волоски себя пересѣкаютъ, дѣлается иногда малинькой кружечикъ. Сіе не мало служить можетъ къ точности въ мѣрѣніи угловъ. Потомъ для болѣе вѣрности и способности вмѣстѣ діоптры придѣлываются иногда зрительныя трубки.

При-

Примѣчаніе 3.

25) Въ практической Геометріи по большой части мѣряются углы находящіеся на плоскостяхъ горизонтальной и вертикальной. По сему, когда уголъ должно мѣрять на плоскости горизонтальной, то плоскость круга надлежитъ привести въ горизонтальное, а когда уголъ должно мѣрять на вертикальной плоскости находящейся, то плоскость астролябіи должно привести въ вертикальное положеніе. Наконецъ когда уголъ ОРА на плоскости горизонтальной находящейся мѣрять должно, то астролябію такъ Fig. поставитъ надлежитъ, чтобъ центръ оной 12. прямо стоялъ противъ точки Р на землѣ вертикальнымъ коломъ означенной. Понеже отъ помянутыхъ вещей зависитъ точность въ сниманіи угловъ, то сія матерія требуетъ обстоятельнаго изъясненія.

Задача 6.

26) Астролябію такъ поставитъ, чтобъ центръ оной соответствовалъ назначенной на поверхности земной точкѣ.

Рѣшеніе.

Пусть будетъ означенная на поверхности Fig. земной точка Р. Надлежитъ сперва 12. около точки Р радиусомъ, которой долженъ
быть

быть нѣсколько побольше, нежели радиусъ круга аспролябіи, на поверхности земной описать кругъ АВС, и ношки аспролябіи разположить по назначенной окружности, попомѣ по шу, по другую ношку аспролябіи втыкая глубже въ землю надлежитъ ихъ привести въ такое положеніе, чтобъ гирька выше сего упомянутая въ самую средину шочки на землѣ означенной падала.

Примѣчаніе.

27) Хотя и упомянуто выше сего, что аспролябію должно такъ спавить, чтобъ центръ ея сполябъ противъ самой точки на землѣ означенной: однакожъ, хотя бы гирька не въ самую почку падала, не большее гирьки отъ почки разстояніе такой погрѣшности, которую бы въ практикѣ презрѣть не можно было, произвести не можетъ. Чтобъ сіе показать, положимъ что мѣря аспролябію уголъ $\angle ACB$ центръ аспролябіи соотвѣтствуетъ не точкѣ C , но точкѣ D и $CD = \frac{1}{4}$ арш: $= 4$ вершк: Такимъ образомъ вмѣсто угла $\angle ACB$ вымѣряя будетъ уголъ $\angle ADB$, который пусть будетъ $= 54^\circ 32'$. Сверхъ сего AC или AD пусть будетъ $= 50$ саж: $= 150$ арш: $= 2400$ вершк: и въ треугольникѣ ADC данъ будетъ уголъ $\angle ADC$ и бока AD и CD , и для того чтобъ опредѣлить прочіе углы должно посылать

AD

$$\begin{aligned}
 AD+CD:AD-CD &= \text{tang}_1^1 ADB: \text{tang}_2^1 (ACD-DAC) \\
 | \text{tang}_1^1 ADB &= 9.7121461 \\
 | AD-CD &= 3.3799868 \\
 & \quad 13.09216329 \\
 | AD+CD &= 3.3809345 \\
 | \text{tang}_2^1 (ACD-DAC) &= 9.7106984
 \end{aligned}$$

Сему логариѣму найдется въ таблицахъ соотвѣствующей уголъ $27^\circ 11' 20''$, слѣдовательно уголъ $ACB = 54^\circ 27' 20''$, которой отъ истиннаго разнится на $4' 40''$. Толь малой погрѣшности мѣряя уголъ аспролябю, и поставя оную такъ, чтобъ центръ ея стоялъ надъ самою почкою С, едва избѣжать можно. Ежели такъ малая разность происходитъ, когда центръ аспроляби отъ точки С отстоитъ на 4 вершка, то она еще мѣнше быть должна, ежели центръ ея будетъ отстоять на одинъ только вершокъ. А такой погрѣшности, чтобъ центръ аспроляби отъ точки С отдаленъ былъ на 4 вершка, кто хотя мало въ такихъ дѣлѣхъ упражнялся, знать не можетъ. Случается иногда, что по неволѣ принуждены бываемъ отступать отъ того мѣста, противъ котораго центръ аспроляби поставить надлежало бы, и по неволѣ мѣряемъ со всѣмъ не тотъ уголъ, который требуется. Но о семъ ниже сего пространнѣе говорено будетъ.

Задача 7.

28) *Плоскость астролэби привесть въ горизонтальное положеніе.*

Рѣшеніе.

Для приведенія астролэби въ горизонтальное положеніе должно имѣтьъ стекляной призматической сосудъ , и не на полъ , но въ пристойномъ мѣстѣ , поставя на горизонтальную плоскость , налить въ него воды и кругомъ съ вѣшнихъ сторонъ по бокамъ означить поверхность ея. Для способности прибавляя воды можно здѣлать большее число подобныхъ , какъ бы сказать , вѣнцовъ. Чтобъ помощію такого ватерпаса узнать въ горизонтальномъ ли положеніи плоскость астролэби находящіяся, надлежитъ сперва астролэбию по глазомѣру привести въ горизонтальное положеніе ; потомъ сосудъ , наливши въ него воды , поставить на плоскость астролэби, и смотрѣть сходствуетъ ли, или параллельна ли поверхность воды съ которымъ нибудь вѣнцомъ. Когда вода съ которымъ нибудь вѣнцомъ будетъ сходствовать , то плоскость астролэби будетъ дѣйствительно въ желанномъ положеніи, или по крайней мѣрѣ на весьма малой или нечувствительной уголъ отъ онаго отстоятъ будетъ. А ежели поверхность воды ни съ которымъ вѣнцомъ ни сходствовать , ни параллельна не будетъ ,

будетъ , то должно по тѣхъ поръ перемѣ-
нять по маленьку положеніе плоскости , пока
не приведена будетъ въ вышепомянутое по-
ложене.

Примѣчаніе.

29) Чѣмъ способнѣе вѣнцы на сосу-
дѣ означать можно было , надлежитъ стек-
ляной сосудъ вставить въ деревянной кубъ ,
и тогда поставя на горизонтальную пло-
скость вѣнцы означать ; такимъ образомъ
и употребленіе его здѣлается способнѣе. При
размѣреніи полей , пашенъ и урочищъ о го-
ризонтальномъ астролѣбіи положеніи увѣря-
ются обыкновенно на одномъ глазомѣрѣ.
Правда , что хотя астролѣбіа на одинъ , два
или три градуса отъ горизонтальнаго поло-
женія отстоятъ будетъ , однакожъ въ мѣ-
ряніи угла такой погрѣшности , которой бы
въ подобныхъ случаяхъ презрѣть не можно
было , произвести не можетъ ; что видно
будетъ изъ ниже слѣдующихъ. Но точность
въ мѣряніи угла не меньше зависитъ и
отъ того , чѣмъ центръ астролѣбіи соот-
вѣтствовалъ точкѣ на землѣ назначенной ,
откуда видно , что ежели и въ положеніи
плоскости , и въ постановленіи центра астро-
лѣбіи ошибеность будетъ , то на послѣдокъ
можетъ въ мѣряніи угла произойти такая
ошибка , которой и въ самыхъ грубыхъ раз-
мѣреніяхъ презрѣть не можно ; и потому
стараться должно , сколько возможно , или

сколько обстоятельств допускаютъ, удовлетворить выше сего упомянутымъ требованіямъ.

Задача 8.

30) Астролябію привести въ вертикальное положеніе.

Рѣшеніе.

1) Понѣже астролябіа ставится въ вертикальное положеніе для мѣрѣнія угловъ на вертикальной плоскости находящихся, тогда въ компасѣ не бываетъ нужды, и для того стекло и стрѣлку снять должно; и вмѣсто стрѣлки къ шпилькѣ прицѣпишь на тоненькой ниточкѣ или волоскѣ малинькой и легинькой шарикъ, чтобъ шпилька не могла искривиться. Потомъ перемѣняя по маленьку положеніе астролябіи должно привести въ такое, чтобъ нитка или волосокъ съ плоскостью висѣлъ параллельно. Если сие учинено будетъ, то должно почитать, что плоскость астролябіи находится въ вертикальномъ положеніи.

2) Когда астролябію должно такъ поставить, чтобъ не только была въ вертикальномъ положеніи, но и диаметръ, на которомъ неподвижныя дюптры находятся, былъ съ горизонтомъ параллеленъ, то сверхъ того, что выше сего предписано, астролябію

бю должно такъ поставитъ , чтобъ воло-
сокъ закрыталъ линію на неподвижномъ по-
перешникѣ DM проведенную , или бы падалъ
на самое дѣленіе , гдѣ 180° и 360° означа-
ются. Тогда плоскостъ астролябіи въ вер-
тикальномъ , а діаметръ съ неподвижными
дѣлствами съ горизонтальномъ параллельномъ
положеніи находиться будутъ.

Примѣчаніе.

31) Бываютъ случаи , что должно
мѣрять углы ни на горизонтальной , ни вер-
тикальной плоскости находящаяся , но къ
горизонту наклоненной ; но о томъ какъ
астролябію при такихъ случаяхъ приводить
въ надлежащее положеніе , говорить нѣтъ
нужно , потому что нѣтъ для сего другого
способу , какъ примѣняясь къ положенію пло-
скости , на которой уголъ находится.

32) Въ выше сего , для приведенія
астролябіи въ надлежащее положеніе , пред-
ложенные способы съ немалымъ усиліемъ
употреблять можно въ тихую погоду и при
умѣренномъ вѣтрѣ. Но ежели вѣтръ будетъ
жестокій , то не только упомянутыхъ , но
и въ другихъ погрѣшностей избѣжать не
можно. И для того въ такомъ случаѣ луч-
ше прудъ оставитъ до другого времени , не-
жели на ненадежныя и сомнительныя размѣ-
ренія полагаться.

Задача 9.

33) Вымѣрять уголъ ORQ на горизонтальной плоскости находящейся.

Рѣшеніе.

Fig. Когда мѣста O и Q не очень далеко
 12. отстоятъ отъ означенной точки P , то въ точкахъ O и Q надлежитъ поставить по вертикальному колу. Потомъ астролябію должно такъ поставить, чтобъ центръ ея соотвѣтствовалъ точкѣ P , плоскость ея по глазомѣру поставя въ горизонтальномъ положеніи, и обращая кругъ астролябіи надлежитъ неподвижныя діоптры навесить на одинъ колъ, а подвижныя на другой. Потомъ предписаннымъ выше сего образомъ изслѣдовать, почто ли въ горизонтальномъ положеніи плоскость астролябіи находится. Еслии будетъ не въ горизонтальномъ, то должно поправлять по шѣхъ поръ, пока не приведена будетъ въ надлежащее положеніе, или по крайнѣй мѣрѣ, чтобъ отъ горизонтальнаго на весьма малой уголъ отстояла. Тогда, ежели діоптры прежнее свое положеніе въ разсужденіи коловъ O и P переменятъ, навесить ихъ снова на колья, число градусовъ и минутъ на окружности круга щипая отъ діоптры на одинъ наведенной до діоптры на другой колъ наведенной покажетъ величину угла.

Прихѣ-

Примѣчаніе.

34) рѣдко случается въ практикѣ , чтобѣ колья **O** и **Q** такъ блиско отъ точки **P** ошстояли , чтобѣ простымъ глазомъ видѣть можно было. Отмѣнной остроты глазѣ быть долженѣ , чтобѣ въ рѣзшеніи 80, 100 или 120 саж: Геометрической колы ясно виденѣ былѣ. Сие обстоятельство принуждаеиъ иногда вмѣсто кольевѣ въ точкахѣ **O** и **Q** ставить какіе нибудь большіе знаки , которые и ту пользу приносяиъ , что отъ вѣтру не скоро положеніе свое переиѣнить могутѣ. Въ такомъ случаѣ , когда для способности поставленѣ будетѣ въ точкѣ **O** большой знакѣ , и выиѣряиъ уголѣ **P** должно будетѣ перейти на мѣсто **O** , чтобѣ выиѣряиъ уголѣ **POQ** , то ни надѣ точкою **O** , ни надѣ пою , на которую дюреры наведены были , центра астролэбии поставить будетѣ не возможно , разѣ знакѣ со вѣиъ срыиъ , которой опяиъ , когда переидеиъ на мѣсто **Q** , замѣбится ; семууду являеиъ , что и въ простой практической Геометрии могутѣ быть случаи , при которыхѣ надѣ означенною на землѣ точкою центра астролэбии поставииъ не можно. Какѣ выиѣрянной уголѣ поправляиъ ниже сего говорено будетѣ. Точка , надѣ которою центрѣ астролэбии поставленѣ быть долженѣ , для краткости названѣ быть можетѣ *центрѣ мѣста* [*centrum stationis*].

ЗАДАЧА 10.

35) Вымѣрять уголъ на пертикальной плоскости находящейся.

Рѣшеніе.

Надлежитъ сперва по глазомѣру плоскость астролябии привести въ вертикальное положеніе, діоптры на неподвижномъ поперешникѣ находящіяся съ горизонтомъ параллельное, а движущіяся діоптры навесить на данную въ верьху точку. Потомъ по предписанному въ § 30 способу испытать, точно ли въ желанномъ положеніи плоскость астролябии находится, и положеніе ея исправить. Тогда, ежели сквозь движущіяся діоптры, точки, на которую прежде были наведены, невидно будетъ, то опять ихъ навесить должно. Число градусовъ и минутъ на окружности считая отъ неподвижныхъ до подвижныхъ діоптръ покажетъ величину угла.

Примѣчаніе.

36) Кто въ практикѣ упражнялся, тому довольно извѣстно, сколь трудно сыскать такой инструментъ, въ которомъ бы раздѣленіе окружности никакой погрѣшности не было подвержено, и для того не бесполезно будетъ, всегда испытывать, вѣрно ли раздѣленіе здѣлано. На сей конецъ надлежитъ выбирать

выбрать три мѣста на горизонтѣ O, P, Q , чшъ въ извѣ каждомъ два прѣмѣ видны были, и въ нихъ поставить знаки, попомѣть помощью инструмента горизонтально поставленнаго вымѣрять углы O, P, Q , и ежели сумма ихъ будетъ 180° , то будетъ значить, что раздѣленіе окружности зѣлано аккуратно. Тожъ можно учинить, ежели вмѣсто треугольника употребленъ будетъ многоугольникъ какой нибудь, и вымѣрять всѣ углы около себя на горизонтѣ лежащіяся. Ежели сумма въ нихъ будетъ 360° , то раздѣленіе зѣлано вѣрно. Подобной способъ можно употребить для повѣренія угла 90° , 36° , 30° и всякаго другаго, который произойдетъ отъ дѣленія 360 градусоѣ на какое нибудь цѣлое число, какъ на примѣрѣ: $36^\circ = 4^\circ$, $36^\circ = 72^\circ$ и проч: и опредѣлить ошибку въ дѣленіи. Ежели ошибка въ цѣлой окружности не будетъ превышать нѣсколько минутъ, какъ на примѣрѣ $5'$ $6'$ или $8'$, то въ практикѣ какъ при размѣреніи пашенъ, полей, въ сниманіи плановъ, сего потребнаго не поправляя мѣряемыхъ угловъ презрѣть можно.

ГЛАВА ВТОРАЯ.

СОДЕРЖАЩАЯ РѢШЕНИЯ НѢКОТОРЫХЪ ЗАДАЧЪ, О КОТОРЫХЪ ВЪ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ НИЧЕГО НЕ УПОМЯНУТО.

Задача 11.

37) Изъ данныхъ двухъ боковъ и угла, которой между ими содержатся долженъ, описать треугольникъ.

РѢшеніе.

Fig. Пусть даны будутъ линіи E и F
 14 уголъ DCE . На линіи AM отсѣки линіею
 8 AB равную линіи E , и на концѣ A поставь
 уголъ FAC равной углу DCE , потомъ на
 продолженной Ad отсѣки $AC = F$, точки B
 и C соедини прямою линіею, произойдетъ
 требуемой треугольникъ ACB .

Задача 12.

38) Если дана линія AB и два угла $\angle A$ и $\angle B$, которые при концахъ данной линіи стоять должны, описать треугольникъ.

РѢшеніе.

Одинъ изъ данныхъ угловъ поставь на одномъ концѣ данной линіи, а другой на другомъ, потомъ бока Ac и Bc продолжи по тѣхъ мѣстѣ, пока не соединятся въ точкѣ C , произшедшей треугольникъ ACB будетъ требуемой.

Зада-

Задача 13.

39) На данной линіи описать квадратъ.

Рѣшеніе.

Пусть будетъ данная линія AB , по концамъ линіи AB поставь перпендикулярныя линіи AC и BD , и отѣки $AC=BD=AB$, точки C и D соедини линіею CD фигура $ABCD$ будетъ требуемой квадратъ.

Доказательство.

Понеже углы A и B прямые, то линія AC будетъ параллельна линіи BD , $AC=BD$ и углы A и B прямые: Потомъ CD параллельна и равна линіи AB , углы C и D также прямые. Откуда видно, что въ фигурѣ начерченной $ABCD$ всѣ бока равны между собою, и всѣ углы прямые.

Примѣчаніе.

40) Изъ рѣшенія предвѣдущей задачи явствуетъ, коимъ образомъ изъ данныхъ двухъ линій описывать должно четвероугольникъ прямоугольной, и изъ данной линіи и угла начертить ромбъ.

Задача 14.

41) Данному треуголанику начертить равной квадратъ.

Рѣше-

Рѣшеніе.

Fig. 17. Пусть будетъ треугольникъ ACB , высоту треугольника CP раздѣли на двѣ равныя части, и половину оной перенеси на продолженное основаніе AB , такъ чтобъ было $AE = AB + \frac{1}{2}CP$. На линіѣ AE опиши полукруга APE , и изъ точки B возвысь перпендикулярную линію BF , которая будетъ бокъ искомаго квадрата; и по сему, ежели на линіѣ BF описать квадратъ, то онъ будетъ равенъ треугольнику.

Доказательство.

Площадь треугольника находится, ежели основаніе умножено будетъ на половину высоты (6 179 Геом.); следовательно площадь треугольника $ABC = \frac{1}{2}CP \times AB = BE \times AB$. Но BF есть средняя пропорціанальная линія между AB и BE (169 Геом.); следовательно будетъ $BF^2 = AB \times BE = \frac{1}{2}CP \times AB$, то есть квадратъ на линіѣ BF написанной равенъ треугольнику ACB .

Примѣчаніе.

42) Изъ рѣшенія предвѣдущей задачи явствуетъ, что подобнымъ образомъ четверугольнику прямоугольному и ромбу равнѣи квадратъ описать можно, въ томъ только разность состоятъ, что вмѣсто половины высоты должно къ основанію присоеди-

кутить

купить цѣлую. Но ежели фигурѣ какой нибудь регулярной или нерегулярной, и притомъ многоугольной должно описать равной квадратъ, то сперва фигуру должно раздѣлить на треугольники, и всѣмъ треугольникамъ фигуру составляющимъ заѣмать одинъ равной, или данной фигурѣ уменьшая число боковъ заѣмать равной треугольникъ, а потомъ уже произшедшему треугольнику начертить равной квадратъ, какъ здѣсь показано.

43) Имѣя способъ всякой фигурѣ прямоугольной описывать равной квадратъ, притомъ прелесть, чтобъ искать способу описать кругу равной квадратъ, потому что и кругъ принадлежитъ къ простой Геометрии. Ся задача у Геометровъ подъ именемъ *квадратуры круга* [*Quadratura circuli*] известна. Въ Геометрии доказано, что площадь круга равна треугольнику, котораго основаніе равно окружности круга, а высота радиусу, или равна четырехугольнику прямоугольному, котораго основаніе равно полуокружности, а высота радиусу. И такъ, чтобъ найти квадратъ, котораго бы площадь равна была площади круга, надлежитъ между полуокружностью и радиусомъ сыскать среднюю пропорциональную линию. Откуда явствуетъ, что надлежитъ напередъ опредѣлить прямую линию, которая бы равна была

даны только содержанія діаметра къ окружности, а не показанъ способъ, какъ до онаго дойти можно, то здѣсь сіе присовокупить будетъ не непристойно.

Fig.
18.

44) Изъ § 38 Тригонометріи явствуетъ, коимъ образомъ изъ даннаго радіуса и хорды MN дугѣ MAN соотвѣтствующей, находить должно хорду дуги AM , которая вдвое меньше прежней. Когда дана хорда MN , то извѣстна будетъ и ея половина или синусъ дуги AM , откуда по Пифагоровой теоремѣ можно будетъ найти $PC = \sqrt{MC^2 - MP^2}$, а потомъ и AP ежели изъ AC вычтется PC . Нашедъ AP и зная MP по Пифагоровой же теоремѣ найдется $AM = \sqrt{AP^2 + PM^2}$, или когда AP уже найдена изъ подобныхъ треугольниковъ AMP и AMD произойдетъ $AD : AM = AM : AP$, откуда $AM^2 = AD \times AP = AC \times AP$ и $AM = \sqrt{AC \times AP}$.

45) Положимъ, что радіусъ круга $AC = 1$, и что въ кругѣ описанъ шестиугольникъ регулярной, то найдется

$$MP = 0,5$$

$$AP = 0,1339745962.$$

Потомъ въ фигурѣ регулярной о 12 бокахъ

$$MP = 0,2588190451$$

$$AP = 0,0340741737.$$

въ фигурѣ регулярной о 24 бокахъ

$$MP = 0,1305261922$$

$$AP = 0,0085551786.$$

Въ фигурѣ регулярной о 48 бокахъ
 $MP = 0,0654031292$ $AP = 0,0021410768$.

Въ фигурѣ регулярной о 96 бокахъ
 $MP = 0,032719082$ $AP = 0,0005354125$.

Теорема 1.

Fig.
19.

46) Въ четвероугольнике прямоугольномъ, котораго длина много больше, нежели ширина, ежели изъ точки F за центръ пятой описиется полукружие $BHGC$, и проведется прямая линия GI параллельная боку AB , потомъ хъ четвероугольнику приложенъ будетъ бокомъ параллелепипеда BE какою нибудь ширины, и разрезанъ будетъ чрезъ GI плоскостью KGI параллельною боку CE , и чрезъ дугу GC поповерхностью прямого цилиндра, котораго основаніе падаетъ на $BHGC$, а центръ основанія на F , то тѣло $KGCE$ плоскостію цилиндрическою отсѣченное будетъ меньше третьей части параллелепипеда IE , и разность между ими тѣмъ будетъ меньше, чѣмъ CD будетъ меньше; и наконецъ, когда CD исчезать станетъ, то и разность исчезнетъ.

Доказательство.

На плоскости AE протянутой начертимъ четвероугольникъ LM равной четвероугольнику GE , которой пусть будетъ основаніе пирамиды LMN , а высота ея MNB .
 разб.

вазѣки параллелепипеда и пирамиду плоскостью параллельною основаніямъ AE и LM , и произойдетъ въ параллелепипедѣ разрѣзъ $OPQ - ADE$ шѣла $KGCE$ разрѣзъ VQ , а разрѣзъ пирамиды RT , и будетъ $CD^2 = DH \times DG$, $CP^2 = PX \times PV$ (§ 245 Геом.), откуда

$$CD^2 : CP^2 = DH \times DG : PX \times PV.$$

и понеже $DE = PQ$, то будетъ

$$DG : PV = \text{четв. } GE : \text{четв. } VQ$$

и по сему $CD^2 : CP^2 = DH \times GE : PX \times VQ$,

а понеже $CD = MN$, и $CP = NT$, то будетъ

$$MN^2 : NT^2 = DH \times GE : PX \times VQ$$

Но изъ свойства пирамиды слѣдуетъ, что

$$MN^2 : NT^2 = LM : RT, \text{ то будетъ}$$

$$LM : RT = DH \times GE : PX \times VQ = GE : \frac{PX \times VQ}{DH}$$

Но $LM = GE$, то будетъ и $RT = \frac{PX \times VQ}{DH}$ то есть

$$DH : PX = VQ : RT.$$

А понеже DH меньше, нежели PX , то и разрѣзъ VQ будетъ меньше, нежели RT : и разность шѣмъ будетъ меньше, чѣмъ меньше при томъ же диаметрѣ будетъ CD , потому что ежели CD меньше и меньше взятъ будетъ, то икъ вещь какъ PX такъ и DH будутъ почти диаметру равны. Отсюда слѣдуетъ, что и шѣло $KGCE$ равнымъ образомъ будетъ меньше пирамиды (§ 245 Геом.). Но пирамида LMN равна третьей части призмы IE (§ 267 Геом.), то и шѣло $KGCE$ будетъ равнымъ образомъ меньше третьей части призмы IE .

Тео-

Теорема 2.

47) Сегментъ круга асга больше, Fig. нежели двѣ трети прямоуг.льника $abd\gamma$, котораго основаніе равно хордѣ сегмента, а высота аб равна высотѣ сегмента $сг$, но разность между ними тѣмъ меньше будетъ, чѣмъ меньше сегментъ: и наконецъ разности между ними никакой не будетъ, когда сегментъ тахъ будетъ малъ, что предъ цѣлымъ кругомъ за ничто почитаться можетъ.

Доказательство.

Пусть будетъ часть фигуры $cdgi$ та же самая съ фигурою $CDGI$ при той теоремѣ. И понеже тѣла $KGCE$ и IE , когда фигуры GCD и DI возмущаются за основанія, будутъ изъ роу призывъ, и имѣть одинакую высоту, то тѣло $KGCE$ будетъ содержать къ тѣлу IE , такъ какъ основаніе GCE къ основанію DI . Но понеже тѣло $KGCE$ не многимъ меньше третьей части тѣла IE , то и GCD должно быть не многимъ меньше третьей части четвероугольника ID , и потому GIC немногимъ больше двухъ третей того же четвероугольника; следовательно асга малымъ чѣмъ побольше двухъ третей четвероугольника $abd\gamma$.

Примѣчаніе.

48) Отсюда происходитъ способъ находить площади сегментовъ и секторовъ, хотя не со всѣмъ аккуратной, но отъ истиннаго весьма мало разнствующей. Пусть будетъ секторъ MCN весьма малой. Хорда MN кВ радіусу AC перпендикулярная. Четвероугольника площадь, котораго основаніе MN , а высота AP будетъ $= MN \times AP = 2 MP \times AP$. Отсюда презрѣвъ малую погрѣшность площадь сегмента MAN будетъ $= \frac{2}{3} \times MP \times AP = \frac{4}{3} MP \times AP$. А понеже площадь треугольника $MCN = CP \cdot MP$, то площадь сектора $NCM = \frac{2}{3} MP \cdot AP + MP \times CP = MP (\frac{2}{3} AP + CP)$. Но $\frac{2}{3} AP + CP = \frac{1}{3} AP + AP + CP = \frac{1}{3} AP + AC$. Следовательно площадь сектора MCN будетъ почти $= MP (\frac{1}{3} AP + AC)$ и погрѣшность тѣмъ будетъ меньше, чѣмъ секторъ будетъ меньше.

Задача 15.

49) Найти квадратъ равной кругу, или содержаніе площади круга къ квадрату діаметра своего.

Рѣшеніе.

Раздѣли кругъ на 26 секторовъ, и будетъ MCN боковъ фигуры девятиугольной въ кругъ написанной. Отсюда положивъ

ложивъ $AC=1$, по § 45 будетъ $MP=$
 $0,0327190828$, $AP=0,00053541$, $\frac{1}{3}AP=$
 $0,00017847$, $\frac{1}{3}AP+AC=1,00017847$ и MP
 $(\frac{1}{3}AP+AC)=0,0327190828 \times 1,00017847$.

$$\begin{array}{r}
 0,03\ 27190828 \\
 1,00017847 \\
 \hline
 22\ 90335796 \\
 130\ 8763312 \\
 2617\ 526624 \\
 22903\ 35796 \\
 32719\ 0828 \\
 \hline
 327190828
 \end{array}$$

$0,03272492215 =$ площади сектора.

Которая ежели на 96 умножится, произой-
детъ площадь дѣлаго круга $=3,141592$.
Слѣдовательно квадратъ радіуса содержи-
тъся будетъ къ площади круга $=1:3,141592$,
и квадратъ діаметра къ площади круга
 $=4:3,141592 = 1:0,785398 = 100000:78539$.

С л ѣ д с т в і е.

50) Понеже площадь круга равна
треугольнику, котораго основаніе равно ок-
ружности круга, а высота радіусу, или
четвероугольнику, котораго основаніе равно
полуокружности круга, а высота радіусу
(§ 187 Геом.), то квадратъ радіуса содер-
жится будетъ къ площади круга, такъ
Щ а какъ

какъ радиусъ къ половинѣ окружности. следовательно радиусъ къ половинѣ окружности или діаметръ къ цѣлой окружности почти $\frac{1}{2} : 3,141592 = 1000000 : 3141592$, или меньшими числами 100 : 314.

Примѣчаніе.

51) Если бы кругъ раздѣленъ былъ на большое число секторовъ, то бы искомое содержаніе точнѣе получить можно было. Хотя въ Геометріи и даны правила, какъ изъ даннаго діаметра находить окружность и площадь круга, и обратно; однакожъ примѣрами не изъяснены; положимъ, что данъ кругъ, котораго діаметръ 113'', то окружность найдется чрезъ посылку.

$$1000000 : 3141592 = 113 : Q$$

$$\begin{array}{r} 113 \\ \hline 9424779 \\ 3141592 \\ \hline 3141592 \end{array}$$

$$1000000) 354999896 (354,999896 = Q \text{ или по } (\text{чти } 355''$$

И се есть содержаніе Мецьево. Когда окружность извѣстна, площадь круга произойдетъ, ежели она умножится на четвертую часть діаметра, то есть $\frac{1}{4} 355 = 10028\frac{3}{4}$ квадр: А понеже квадратъ діаметра $(113)^2 = 12769$; то будетъ квадратъ діаметра къ площади круга

круга по Меццовой пропорции $\frac{12 \cdot 69}{1002} \frac{3}{4} = 452:355$. Откуда явствует, что когда данъ диаметръ круга, который, пусть будетъ $\frac{1}{2}D$, то площадь оного найдется посылая $1000:785$ или $452:355 = DD$ кв. четвертому пропорциональному, которое будетъ искомая площадь.

52) Если дана будетъ площадь круга, то сперва квадратъ диаметра найдется посылая $785:1000$ или $355:452$, такъ данная площадь круга кв. четвертому пропорциональному, которое будетъ квадратъ диаметра, и ежели изъ найденнаго числа изълечешь корень квадратной, найдется самый диаметръ. Пусть будетъ площадь круга $4 \text{ б} 1 \text{ б}''$ квадратъ: квадратъ диаметра найдется посылкою.

$785:1000 = 246116:Q = \frac{246116 \times 1000}{785} = 313600$
 самой диаметръ будетъ $\sqrt{313600} = 560'' = 5'$.

53) Чтобы еще изъяснить приѣздомъ важнымъ и полезнымъ, привожду здѣсь изчисленіе диаметра земнаго, по ширинѣ и толщинѣ землѣ. Изъ Парижской Академіи посыланные члены къ экватору и сѣверному полюсу нашли, что одинъ градусъ меридіана около экватора содержитъ въ себѣ 56742 тоазовъ или 340494 Пар: футовъ. Градусъ меридіана около сѣвернаго полярнаго круга содержитъ въ себѣ 57417 тоазовъ или 344622 футовъ, а около Парижа

Щ 3

гра-

градусъ меридіана содержитъ въ себѣ 57183 тоазовъ или 343098 Парижск: футовъ. Откуда видно, что земля несовершенно сферическую фигуру имѣетъ. Мы для способности положить, что она совершенной шаръ, и градусу меридіана сообщимъ посредственную величину, то есть 343098 Пар: фут: Чтобъ найти, сколько градусъ содержитъ въ себѣ Агалискихъ футовъ по § 5 должно посылать

$$1351 : 1440 = 343098 : Q$$

$$\begin{array}{r}
 1440 \\
 \hline
 1372392 \\
 1372392 \\
 343098 \\
 \hline
 1351) 494061120 \quad (365700 + \\
 4053 \\
 \hline
 8876 \\
 8106 \\
 \hline
 7701 \\
 6755 \\
 \hline
 9451 \\
 9457 \\
 \hline
 4
 \end{array}$$

По сему градусъ земной содержитъ въ себѣ 365700 + Агл: футовъ, а сажень русскихъ 52242; и такъ на одну минуту градуса земнаго достанется $870\frac{2}{3}$ саж: а на одну секунду $14\frac{1}{3}$ саж: Когда столько сажень одинъ

одинъ градусъ въ себѣ содержитъ, окружность круга чрезъ полюсы проходящаго, или полагая, что земля совершенной шаръ, окружность экватора будетъ $\frac{360 \times 52242}{180} = 106084$ саж: или $3761\frac{1}{4}$ верстъ. Опредѣливъ окружность экватора діаметръ земной найдется посылакою

$$355 : 113 = 3761\frac{1}{4} : Q$$

$$\begin{array}{r} 113 \\ \hline 112848 \\ 37616 \\ \hline 37616 \\ 355 \overline{) 4250615} \quad (11974 \\ \underline{355} \\ 700 \\ \underline{355} \\ 3456 \\ \underline{3195} \\ 26199 \\ \underline{2485} \\ 12858 \end{array}$$

И такъ діаметръ земной будетъ 11974 версты. Когда діаметръ и окружность экватора извѣстны, то поверхность шара земнаго произойдетъ, ежели площадь упомятаго круга умножится на 4 (§ 277 Геом.); а понеже діаметръ экватора $\frac{11974}{2}$, и окружность его $3761\frac{1}{4}$, то площадь будетъ $\frac{11974}{2} \times 3761\frac{1}{4}$ квадрат: верстъ, а поверхность шара земнаго $\frac{11974}{2} \times 3761\frac{1}{4}$.

Или 4

$3761\frac{1}{4}$

$$\begin{array}{r}
 37616\frac{1}{4} \\
 \cdot 11974 \\
 \hline
 150464 \\
 263312 \\
 338544 \\
 37616 \\
 \hline
 37616 \\
 \hline
 450413984 \\
 2993\frac{1}{2} \\
 \hline
 450416977\frac{1}{2} \text{ квадрат: верстѣ.}
 \end{array}$$

Откуда площадь шара земнаго (§ 276 Геом :) будетъ $= \frac{2}{3} \cdot 11974 \times \frac{150464}{4} \times 37616\frac{1}{4} = \frac{2}{3} \cdot 11974 \times 450416977\frac{1}{2} = 898882147099\frac{1}{2}$ куб: верст:

54) Въ геометрии упомянуто , что не всякой полигонъ въ кругъ Геометрическимъ образомъ описать можно , и предложенъ Механической способъ , какъ описывать въ кругъ и около круга всякой полигонъ не зная величины бока. Здѣсь присовокуплю способъ найдяши величину бока описывать полигонъ регулярной.

Задача 16.

55) Въ данномъ кругъ описать многоугольникъ регулярной.

Рѣше-

Рѣшеніе.

Положимъ какъ въ Тригонометріи, что радиусъ раздѣленъ на 1000000 частей. Въ таблицахъ синусовъ и тангенсовъ возьми синусъ угла, которой произойдетъ, когда 180° раздѣлишь на число боксвъ многоугольника, или 360° на число боксвъ дважды взятое, которой ежели удвоится, то будетъ бокъ многоугольника, который въ кругѣ описатьъ должно, начертивши многоугольникъ въ кругѣ, и около круга такой же многоугольникъ описать будетъ можно.

Примѣчаніе.

56) Ежели радиусъ круга, въ которомъ многоугольникъ начертить должно, данъ будетъ въ какой нибудь мѣрѣ, то въ многоугольника въ той же мѣрѣ и ищется по прѣжнему правилу. Пусть тѣ кругъ, а порога радиусъ $= 15''$ Геом. должно описать пятиугольникъ. Когда бы радиусъ былъ 1000000, то бы бокъ пятиугольника былъ $= 117656$, и потому можно послать

$$1000000 : 15 = 117656 : Q$$

$$\begin{array}{r} 15 \\ 588280 \overline{) 117656} \end{array}$$

$$1000000) 1176560 (117'' 6''' 4'''' 4'''' 4'''$$

Щ 5

или,

или, ежели малыя частицы отбросить, то
искомой бокъ будетъ $17'' 6''$ по той же
мѣрѣ, въ которой радіусъ данъ.

57) Когда на данной линіѣ должно
описать многоугольникъ, то надлежитъ на-
передъ сыскать радіусъ въ той же мѣрѣ, въ
которой линія дается. Чѣмъ сіе учинить,
надлежитъ 180° раздѣлить на число боковъ,
и произойдетъ половина угла при центрѣ,
которому въ таблицахъ синусовъ и танген-
совъ соотвѣствующей синусъ, ежели удвоит-
ся, будетъ бокъ фигуры въ кругѣ, котораго
радіусъ $= 1000000$. Потомъ ежели много-
угольникъ долженъ быть о пяти бокахъ, и
величина бока будетъ $12''$, то радіусъ кру-
га въ той же мѣрѣ посылкою

$$117656 : 1000000 = 12 : Q$$

12

$$117656) 12000000 (10'' 1'V 9'V \text{ рад. искомой}$$

которымъ ежели опишется кругъ, или на
данной линіѣ поставишь преугольникъ равно-
боксы, котораго бы бока были равны най-
денному радіусу, и изъ верьху преугольни-
ка опишешь кругъ, то данной бокъ пять
разъ по окружности умѣстишся.

ГЛАВА 3.

О СЛУЧАЮЩИХСЯ ВЪ ПРАКТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ ЗАДАЧАХЪ.

Задача 17.

58) Найти разстояніе двухъ мѣстъ Fig. между собою, изъ которыхъ отъ одного хъ 22. другому прямой линіи провести не можно.

Рѣшеніе.

Пусть будутъ мѣста А и В, между которыми лежитъ болото или гора, которая препятствуетъ отъ одного мѣста къ другому провести прямую линію: Выбери прѣстѣ мѣсто С, отъ котораго бы къ обѣимъ можно было провести и вымѣрять прямыя линіи АС и СВ, вымѣривъ АС и СВ продолжи ихъ чрезъ С далѣе, пока не будетъ $CE = AC$, $CD = CB$. Линія DE будетъ равна искомому разстоянію АВ.

Доказательство.

Понеже углы на крестѣ АСВ и ЕСД равны между собою, линія $AC =$ линіи СВ, и $CB = CD$, то и треугольникъ АСВ будетъ равенъ треугольнику CDE (6 40). Следовательно линія $DE =$ линіи АВ.

Другое

Другое Рѣшеніе.

Вымѣряя линіи AC и CB , вымѣряя инструментомъ выше сего описаннымъ уголъ ACB , потомъ по § 52 Триг: посылай.

$$AC + CB. AC - CB = \tan g_2^2 (B - A) : \tan g_2^2 (B + A)$$

Нашедъ углы A и B по Тригнометрии § 47 можно будетъ найти и бока AB .

Задача 18.

59) Найти пѣимное разстояніе двухъ мѣстъ, изъ которыхъ хѣ одному дойти не можно

Рѣшеніе.

Fig.

23.

Пусть будутъ мѣста A и B , изъ которыхъ одно B стоитъ за рѣкою. Отъ A смотря чрезъ діоптры къ B замѣть точку F , гдѣ соединяющая линія AB берегъ пересѣчетъ. Потомъ, подъ какимъ нибудь угломъ, проводи прямую линію AD , на которой возьми $CD = AC$ и смотря отъ C къ B назначь на поверхности земной прямую линію BCE , которая соединяетъ точку C и мѣсто B , отъ F чрезъ C проводи линію FG и возьми $CG = FC$. На концѣ чрезъ точки D и G проводи линію DG пока не пересѣчетъ линіи BCE , линія DE будетъ искомое разстояніе.

Доказа-

Доказательство.

Въ треугольникахъ AFC и GDG линия $AC =$ линіи CD . Линія $FC =$ линіи CG и углы на крестѣ ACF и DCG также равны между собою, то будетъ уголъ $A =$ углу D линія $DG =$ линіи AF . (§ 42 Геом.) Потомъ въ треугольникахъ ACB и CED , сверхъ того, что $AC = CD$, уголъ $A =$ углу D и углы на крестѣ ACB и DCE равны между собою слѣдовательно будетъ и линія $ED =$ линіи AB .

Другое рѣшеніе.

Выбравъ мѣсто C вымѣрай линію AC , и уголъ ACB , потомъ перейди на A , и вымѣрай уголъ BAC , тогда будетъ извѣстенъ и уголъ ABC , и найдется AB чрезъ посылку.

$$\sin ABC : \sin ACB = AC : AB$$

Примѣчаніе.

60) Если бы точка B была самой берегъ рѣки, тобъ DE было разстояніе онаго отъ точки A , изъ котораго, ежели вычесть AF , останется ширина рѣки, откуда явствуетъ какъ находить ширину рѣки, и разстояніе мѣста за рѣкою стоящаго отъ берегу рѣки, или разстояніе корабля отъ берегу.

61) Если случится проводить линию OA
 дойти до болота или сему подобнаго , такъ
 что далѣе линіей OA вести не возможно , и за
 24- AB сомъ или другимъ чѣмъ по другую сторону
 ничего видѣть не можно : то по предвѣдущей
 задачѣ не проводя линіей AX можно обошедъ
 болото найти точку X , которая упадетъ
 на продолженную линією OAX , и длину линіей
 AX . Надлежитъ отъ точки A поворошитьъ
 въ сторону и провести линією подъ какимъ
 24- AB нибудь , но извѣстнымъ угломъ CAB по пѣхъ
 поръ , пока изъ точки B я видна будетъ спо-
 рона X , куда линія протянута быть долж-
 на , и линією AB вымѣрять : Потомъ отъ
 точки B поворошитьъ въ сторону X и уголъ
 ABX вымѣрять . Такимъ образомъ въ треу-
 гольникѣ ABX извѣстны будутъ углы и ли-
 ния AB , и для того можно будетъ найти ,
 сколь велико разстояніе BX быть должно ,
 чтобъ точка X упала на линією OAX , а
 потомъ и длину линіей AX найти будетъ
 можно . Если точку B очень далеко прово-
 дить должно , чтобъ спорона X видна была ,
 то можно учинить большее число поворошовъ .
 Какъ на примѣръ въ C и D , и при всякомъ
 поворотѣ углы мѣрять ACD и CDX , въ
 такомъ случаѣ когда два поворота учинено
 будетъ , то въ треугольникѣ ACD , извѣст-
 ны будутъ бока AC и CD и уголъ ACD , и
 потому линією AD и углы CDA опредѣлить
 будетъ можно . А понеже углы CAX и CDX
 даны , то извѣстны будутъ и углы DAK и
 ADK ,

ADX , и поштому изъ треугольника ADX можно будетъ опредѣлить сколь велика должна быть линия DX подъ угломъ CDX проведенная , чтобъ точка X упада на прямую линию OAX , а наконецъ и длину линей AX изъ тогожъ треугольника опредѣлить можно.

Задача 19.

62 *) Найти разстоянiе двухъ мѣстъ между собою , изъ которыхъ ни къ одному подойти не возможно.

Рѣшенiе.

Пусть будутъ за рѣкою мѣста A и B . Выбери третье C изъ которыхъбы оба преж- 25-
ня видны были. Изъ мѣста C смотря сквозь
дiоптры на A и B назначь линiею BCK , на
которой лежатъ мѣста B и C , потомъ назначь
и ACL , на которой лежатъ A и C . чрезъ
точку C проведи линiею DE , и отсѣки по
обѣимъ сторонамъ $CD=CE$. Изъ точки D
смотря сквозь дiоптры , замѣнь гдѣ прямая
линей соединяющая точки A и D берегъ пе-
ресѣчетъ , тожъ должно учинить смотря
опъ E къ B , и изъ замѣченныхъ мѣстъ F
и G проведи линiи FI и GH такъ чтобъ
было $FC=CI$ и $CH=CG$. потомъ чрезъ
точки D и H проведи прямую линiею DK , пока
не пересѣчетъ продолженной линiи CK , и чрезъ
точки E и I проведи EL , пока не пересѣ-
четъ

четъ продолженной CL . На конецъ точки K и L соедини линеею KL , которая будетъ $=AB$.

Доказательство.

Изъ § 59 явствуетъ, что AC должно быть $=CL$, и $CK=CB$; сверхъ сего углы на крестѣ ACB и KCL равны между собою слѣдовательно треугольникъ $ACB=$ треугольнику KCL (§ 42 Геоми.) $\therefore KC=AB$.

Другое Рѣшеніе.

Fig. 20. Выбери мѣсто C , изъ котораго бы видны были за анныя мѣста, и чрезъ C проводи линеею DE , изъ C смотря на A и B вымѣрай ACD ACB и BCE , перешедъ на мѣсто D вымѣрай уголъ ADC , и такъ въ треугольникѣ ACC даны будутъ два угла и линия DC , слѣдовательно линеею AC опредѣлить можно (§ 46 Триг). Тожъ должно учиться и съ другой стороны, вымѣрять углы BCE и BEC изъ треугольника BCE найти линеею BC . Когда найдены будутъ линеею AC и BC , и уголъ ACB вымѣряя, то найдется и бокъ AB (§ 52.53 Триг:).

Примѣчаніе.

63) Выкладокъ по логарифмамъ здѣсь не прилагаю для того, что всѣ случаи изъяснены

я. нены примѣрами въ тригонометрии. Теперь остается опредѣлить, которой изъ сихъ способовъ съ большею аккуратностію и способностію употреблять можно. Должно думать, что имѣя твердую и послѣднюю мѣру, всякое разсужденіе, такъ аккуратно вымѣрять можно, что большей точности преосвѣтъ не возможно, ежели только не воспрепятствуютъ неровности на поверхности земной находящияся. А въ сниманніи угловъ предложеннымъ инструментомъ не только на нѣсколько секундъ, но и въ минутокъ ошибки паче можно. Но съ другой стороны имѣя же уголъ для повѣренія способѣ можно вымѣрять другой разъ или тремя, нежели линією, и рѣдко случаются такія мѣста, на которыхъ бы никакихъ веревочекъ не находилось, и что въ такомъ мѣстѣ на дозволено пропихивать, сколько понадобится линій. По сему первому способу должно предпочесть второй. И такъ еще съѣхъ по мѣстамъ до мѣстныхъ примѣтовъ разсуждая, что съѣхъ и тамъ же изъ данныхъ потребныхъ линій, угловъ, развѣсивши и углы опредѣлять по выкладкамъ, нежели находить развѣреніемъ.

61) Въ вѣхъ предвѣдѣнныхъ случаяхъ мѣсто С за мѣсто В, а мѣсто В за мѣсто С, и углы АСВ и ВСА какъ бы взаимною угловъ АСВ и ВСА бы бывъ, въ мѣстѣмъ снѣго разную погрѣшность, или отъ неистинности инструмента,

в

кото-

которымъ углы мѣряются , или съ дру-
гихъ какихъ нибудь обстоятельствъ учинить
можно ; то надлежитъ выбирать углы , ко-
торые отъ нашей воли завиѣяютъ , дабы
ошибка въ ономъ самую малую погрѣшность
въ искомомъ разстояніи произвела. Чтoby

Fig. 27. **С**такъ выбрано , что уголъ **АСВ** найденъ $55^{\circ} 45'$, и ошибка послѣдовала въ избытокъ на $10'$, а уголъ **ВАС** и разстояние **АС** вымѣ-
ряны вѣрно. Такимъ образомъ разность ло-
гарифмовъ вымѣреннаго угла и истиннаго
будетъ 8628. Но ежели бы уголъ не изъ
точки **С** , но изъ точки **Д** мѣрянъ былъ ,
и съравною погрѣшностію уголъ **АДВ** найденъ
бы былъ $78^{\circ} 77'$, а уголъ **ВАД** вымѣрянъ вѣр-
но , то разность логарифмовъ соотвѣствующихъ
истинному и вымѣренному углу бу-
детъ 2001 меньше , нежели прежде слѣдо-
вательно и въ искомомъ разстояніи **АВ** мень-
шую погрѣшность произвестъ должна. Ош-
куду явствуетъ , что и въ избраніи мѣстъ
должно слѣдовать извѣстнымъ правиламъ ,
которые для предложенныхъ выше сего
случаевъ въ слѣдующихъ параграфѣхъ сооб-
щаются.

65) Положимъ , что въ § 57 , когда
мѣрянъ былъ уголъ **АСВ** , ошибенось на вѣсь-
ма малой уголъ **ВСВ** , а линии **АС** и **ВС**
Fig. 28. вымѣряны вѣрно , то по Тригонометріи вмѣ-
сто разстоянія **АВ** найдется **Ав**. Чтoby
опредѣ-

опредѣлить , сколько разстояние Ab отъ истиннаго разнствуемъ , изъ центра C радиусомъ CB опиши дугу Bb , которую для малости ея за прямую линию почесать должно , и уголъ CBb будетъ прямой : Потомъ ежели изъ A чрезъ B опишешь дугу $B!$, то будетъ $AB = Ad$ уголъ $AB!$ прямой , следовательно $ABd = CB! = CBb = \angle B!$, т. е. $ABC = bBd$ и въ треугольникъ Bbd будетъ

$$\sin tot : \sin bBd = Bb : db$$

или $\sin tot . \sin ABC = Bb : db$

откуда $db = \frac{B \times \sin ABC}{\sin tot}$. Следовательно при равныхъ прочихъ обстоятельствахъ погрѣшность тѣмъ будетъ меньше , чѣмъ уголъ ABC будетъ меньше : откуда видно , что мѣсто C сколько возможно ближе къ мѣсту A выбирать надлежитъ , дабы углы A и C ближе къ прямымъ подходили.

66) Чтobъ перейти въ случаи , о которыхъ выше сего упомянуто , положимъ , что когда изъ двухъ угловъ A , ABC и линии AC ищется разстояние AB , въ мѣрѣнн угловъ геогногала въ ономъ полъко снѣжка , такъ что гмѣсто угла ACB гмѣтъ бы былъ уголъ ACo , то по выкладкѣ вмѣсто AB найдемъ Ab , и ежели изъ центра C разстояниемъ CB опишемъ дугу BE , то по малости угла BCE дугу BE можно почесать за прямую линию , которая будетъ мѣра

въ 2 погрѣш-

Fig.
29.

погрѣшности въ уголѣ послѣдовавшей : и по-
неже углы CBE и CEB суть прямые , то
должно быть $\text{ABC} + \text{EEb} = 90^\circ$, $\text{VbE} + \text{EVb}$
 $= 90^\circ$. Откуда $\text{ABC} + \text{EVb} = \text{VbE} + \text{EVb}$ и
 $\text{ABC} = \text{VbE}$, но въ треугольникѣ VbE дол-
жно быть

$$\sin \text{VbE} : \sin \text{tot} = \text{VE} : \text{Vb} \text{ или}$$

$$\sin \text{ABC} : \sin \text{tot} = \text{VE} : \text{Vb}$$

Откуда $\text{Vb} = \frac{\sin \text{ABC}}{\sin \text{tot}} \times \text{VE}$. Слѣдовательно при
равной въ уголѣ погрѣшности , разность ме-
жду истиннымъ разстояніемъ и найден-
нымъ пѣмъ будетъ меньше , чѣмъ уголъ
 ABC будетъ больше , и потому мѣсто C
также выбирать надлежитъ , чтобъ углы
 A и ACB были острые , а уголъ B , сколь-
ко возможно , подходилъ ближе къ пря-
мому , для того что ежели будетъ тупой ,
то угла тупаго и остраго съ тупымъ 180°
составляющаго синусы бывають равны , и
потому тупой уголъ къ сему намѣренію не
способенъ .

67) Погрѣшность можетъ послѣдо-
вать не только въ мѣрѣніи угла ACB , но и
въ мѣрѣніи угла CAB . Чѣмъ и въ такомъ
Fig. случаѣ опредѣлить разность найденнаго раз-
30. стоянія отъ истиннаго , положимъ , что мѣ-
ряя уголъ CAB ошибенось на весьма малой
уголъ BAf , такъ что ежели разстояніемъ
 Ab опишешь дугу Fb , то оную за прямую
линею

линею почестъ можно. И понеже въ разстояннн смѣ угла ΔCb прнскодлщл погрѣшностъ ужѣ опредѣлена $= \frac{\sin \angle x B E}{\sin \angle A B C}$, остается опредѣлнтъ погрѣшностъ, которая отъ угла $\angle C A f$ произойти имѣетъ. равнымъ образомъ какъ прежде сего показано было, что уголъ $F i b =$ углу $B b E$, и слѣдовательно $=$ углу $A B C$, а въ треугольникѣ $F b f$ будетъ

$$\sin F i b : \sin F b f = F b : F f$$

или $\sin A B C : \sin F b f = F b : F f$

Откуда сумма погрѣшностей въ разстояннн отъ обоихъ угловъ будетъ $= B b + F f = \frac{F b \sin \angle x B E + F f \sin \angle x B E}{\sin A B C}$, или понеже $\sin \angle x B E = 1$ и $\sin F b f = \cos F f b = \cos A B C$, то произойдетъ $B b + F f = \frac{F b \cos A B C + F f \cos A B C}{\sin A B C}$. Откуда слѣдуетъ, что разность найденнаго разстоянл отъ угла $B A C$ не зависнть, и нѣмъ будетъ меньше, чѣмъ уголъ $A B C$ будетъ больше, однакожъ не должно быть болѣе прнм то. Откуда явствуется, какл чѣша для мѣрчнл угловъ въ предложенныхъ задачахъ выбирать надлежитъ.

Задача 20.

68) Найти высоту мѣста, къ которому лодойтн можно.

Рѣшеніе.

Помощію аспролябіи вымѣрай уголъ
Fig ACB (§ 35), и понеже треугольникъ ABC
31. прямоугольной, то и уголъ BAC будетъ
извѣстенъ. По сему вымѣравъ линейю CB
можно будетъ посылать

$$\sin BAC : \sin ACB = CB : AB$$

$$\text{или } \cos ACB : \sin ACB = CB : AB = CB \times \tan ACB.$$

Нашедъ AB придай къ ней высоту ин-
струмента $CE = BD$, и произойдетъ иско-
мая высота.

Задача 21.

69) Найти высоту неприступнаго
мѣста, или къ которому подойти не
возможно.

Рѣшеніе.

Выбери два мѣста H и G, и вымѣ-
Fig. рай расстояние между ими. Помощію аспро-
32. лябіи, надѣя точкою G поставленной, вымѣрай
углъ ACB. Потомъ аспролябію перенеши
на H вымѣрай углъ ADB, тогда и углъ
ADC будетъ извѣстенъ, и такъ въ треу-
гольникѣ ADC, изъ данныхъ угловъ ADC
ACD и расстоянія DC можно будетъ найти
AD посылая $\sin DAC : \sin ACD = DC : AD$.
Опредѣливши AD въ треугольникѣ право-
угольномъ ADB, углъ ADB извѣстенъ, то
можно

можно посылать $\sin tot : \sin ADB = AD : AB$.
Такимъ образомъ соединяя двѣ посылки въ одну произойдетъ,

$$\sin DB \times \sin tot : \sin ACD \times \sin ADB = DC : AB. \quad \blacktriangle$$

Нашедъ АВ искомая высота будетъ $= AB + DH$.

Примѣчаніе.

70) Какъ въ прежнихъ задачахъ, такъ и въ двухъ предыдущихъ, при равной погрѣшности въ углѣ АСВ, разности истинной высоты, отъ высоты по лѣкалкамъ найденной зависить отъ угла АСВ. Чтобъ опредѣлить самое выгодное мѣсто, откуду уголъ АСВ мѣрять должно, положимъ, что при мѣрѣнии угла ошибенось на весьма малой уголъ Вѳ, такъ чтобъ сикланная дуга BD разтвореніемъ СВ за прямую линию почти сѣ могла. Такимъ образомъ углы СВD и ВDѳ будутъ прямые, $ABC = BCD$, и въ треугольникѣ BDѳ будетъ

$$\sin BѳD \cdot \sin tot = BD \cdot Bѳ$$

или $\sin ABC : \sin tot = BD \cdot Bѳ$.

Откуду Вѳ разность въ высотѣ произходящая отъ погрѣшности въ углѣ ABC будетъ $= \frac{\sin tot \times BD}{\sin ABC}$. Откуду видно, что при равной въ углѣ погрѣшности, найденная разность тѣмъ будетъ меньше, чѣмъ уголъ ABC

АВС будетъ больше, или уголъ АСВ будетъ меньше. По сему надлежало бы мѣсто С какъ возможно выбирать далѣе отъ мѣряемой высоты: Но малые углы не столь способно и вѣрно мѣрять можно, по чѣмъ по нѣкоторой части уасвѣтлорить сбѣимъ требованіямъ, надлежитъ мѣсто С выбирать такое, чѣмъ уголъ АСВ не превышалъ 30°.

Fig. 34. 71) Когда ищется высота неприступнаго мѣста, то ошибка можетъ послѣдовать какъ въ уголъ АСД такъ и въ уголъ АDB. Положимъ сперва, что сшибе-
нось только при мѣрѣніи угла АСВ, на столь малой уголъ АСВ, что дугу Ас разтвореніемъ Аd описанную, за прямую линию почестъ можно. Тогда перешедъ на мѣсто D, и вымѣривъ уголъ АDB изъ треугольника аDC найденъ будетъ вмѣсто AD бокъ аD. Понеже уголъ ААс прямой, то должно быть $\angle A_a + \angle A_c = \angle DAC + \angle A_c$, откуда $\angle A_c = \angle DAC$, и будетъ

$$\sin A_c \cdot \sin tot = A_c \cdot A_a$$

$$\text{или } \sin DAC : \sin tot = A_c : A_a = \frac{\sin tot \times A_c}{\sin DAC}.$$

Потѣмъ изъ треугольника Аба найдется погрѣшность въ высотѣ аb $= \frac{\sin AСВ \times A_c}{\sin DAC} - \frac{\sin ADB \times A_c}{\sin (ADB - AСВ)}$. Откуда видно, что при томъ же уголѣ АDB и при равной погрѣшности въ уголѣ АСВ, ошибка въ высотѣ тѣмъ будетъ меньше, чѣмъ уголъ АСВ будетъ меньше, слѣдовательно

тельно мѣсто D отъ мѣста C, какъ возможно, должно отстоять даѣе. О сей матеріи можно бы говорить пространно, но теперь и сего довольно. Сверхъ предложенныхъ способовъ рѣшить такія задачи, находясь у писателей и другіе, посредствѣмъ подобныхъ треугольниковъ, но я себѣ снѣмъ умолчаю, потому что и безъ удеснѣннаго случая къ погрѣшности, какъ когда гнѣбренная линия кладется на бумагу по уменьшенному масштабу, и для того всегда безопаснѣе употреблять выкладки.

72) Планъ фигуры ABCDE называется фигура сѣ подобная abcde въ меньшемъ видѣ представленная, или которой бока уменьшены по масштабу, но въ такомъ же пол жеміи находятся, въ какомъ соотношествующие имъ въ фигурѣ abcde. Число планъ фигуры какой низудь зѣлашь, надлежитъ вымѣрять или опредѣлить по выдалкамъ довольное число частей фигуры составляющихъ, дабы треугольники, изъ которыхъ фигура раздѣлена представляется, на бумагѣ подобные начертить можно было. Въ практической Геометріи по большей части нужда бываетъ въ двухъ случаяхъ. 1) Когда въ фигурѣ одни углы и ни одного бока, или одинъ только вымѣрять можно. 2) Когда бока и всѣ углы между боками фигуры заключающіеся вымѣрять можно. И для того я о сихъ только двухъ случаяхъ говорить намѣренъ:

ренъ : Всѣ случаи , которые въ самомъ дѣлѣ случиться могутъ , едва изчислить возможно , изъ того , что здѣсь говорено будетъ , всякому не трудно будетъ заключить , какъ при другихъ случаяхъ поступать надлежитъ.

Задача 22.

73) Здѣлать планъ фигуры , въ которой одни углы мѣрять можно.

Рѣшеніе.

Fig 35. Пусть будетъ фигура $ABCDE$, въ которой ежели ни одного боку дѣйствительно вымѣрять не можно , надлежитъ помощью предложенныхъ выше сего способовъ найти разстояніе двухъ которыхъ нибудь мѣстъ между собою , на примѣръ AB . Потомъ фигуру раздѣлить на треугольники , такъ чтоо изъ каждаго мѣста по крайней мѣрѣ два прочія видны были . Положимъ , что фигура $ABCDE$ раздѣлена на треугольники ABE , BCE и CED и въ каждомъ треугольникѣ изъ каждаго мѣста два прочія видны , тогда изъ точки A должн вымѣрять уголъ BAC , и перешедъ на B вымѣрять уголъ ABE , что и третьей уголъ будетъ извѣстенъ , и треугольнику ABE , положивъ на бумагу линію AB , по уменьшенному масштабу подобиси abc на бумагѣ начертить должно . Потомъ изъ точки B вымѣрай уголъ EBC , и изъ точки C

С уголъ ЕСВ, то и третей будетъ извѣ-
стенъ, и для того къ треугольнику абе
можно будетъ присовокупить подобной тре-
угольникъ все треугольнику ВСЕ изъ то-
чекъ С и D вымѣривъ углы ЕCD и CDE къ
начерченнымъ на бумагѣ треугольникамъ при-
совокупи треугольнику ЕCD подобной треу-
гольникъ е d и фигура абсде будетъ подобна
фигурѣ ABCDE. Такимъ образомъ дѣйстви-
тельно продолжатъ принадлежать, ежели фигура будетъ
имѣть большее число боковъ, слѣдовательно и
треугольниковъ.

Примѣчаніе.

74) Ежели потребное число угловъ,
и боковъ фигуры извѣстенъ будетъ, то вели-
чину прочихъ боковъ можно будетъ опре-
дѣлить по Тригонометрии. Въ семъ случаѣ
когда боковъ АВ извѣстенъ, и углы ЕАВ и
АВЕ вымѣрены, то бока АЕ и ЕВ найдены
будутъ чрезъ посылки $\sin AEB : \sin ABE = AB :$
 AE и $\sin AEB : \sin EAB = AB : EB$. Потомъ
когда углы ЕВС и ЕСВ вымѣрены будутъ,
то въ треугольникѣ ЕВС въ углы и боковъ
ЕВ извѣстны, и для того прочіе бока опре-
дѣлить можно чрезъ посылки $\sin ECB : \sin EBC =$
 $EB : EC$. $\sin ECB : \sin BEC = EB : EC$. На-
конецъ въ треугольникѣ ЕCD вымѣривъ углы
ECD, и EDC бока ED и CD найдутся по-
сылая $\sin EDC : \sin ECD = EC : ED$ и $\sin EDC$
 $\sin ECD = EC : ED$. Такимъ образомъ въ каж-

домъ

домъ треугольникъ всѣ три бока опредѣлены будутъ, и для того полагая на бумагу бока по уменьшенному машшабу фигуръ $ABCDE$ подобную или планъ ея $abcde$ начертить можно. Сей способъ несравненно точнѣе перваго, потому что на бумагу кладутся одни бока, а углы сами собою опредѣляются.

75) Изъ сего рѣшенія явствуетъ, что точность плана зависитъ отъ точнаго вымѣрѣнія лини AB , которая въ такихъ случаяхъ *снопанге* называется, и отъ точнаго вымѣрѣнія угловъ. Чтобъ о семъ удостовѣриться, должно на конецъ перейти на мѣсто E , и вымѣрять углы AEB , BEC и CED . Тогда ежели во всякомъ треугольникѣ сумма всѣхъ угловъ будетъ составлять 180° , то углы вымѣрѣны вѣрно, а ежели сумма всѣхъ будетъ больше или меньше 180° , то понеже неизвѣстно, которой не справедливо вымѣрѣнъ, погрѣшность должно раздѣлить по всѣмъ угламъ треугольника пропорционально градусамъ cadaго угла, чтобъ сумма всѣхъ составляла 180° . На примѣръ ежели бы въ треугольникѣ ABE найдено было, что уголъ $A = 125^\circ 45'$, уголъ $B = 34^\circ 40'$, уголъ $E = 20^\circ 17'$, то сумма всѣхъ будетъ $180^\circ 42'$. Чтобъ опредѣлить сколько минутами каждой уголъ убавить должно, посылай $180^\circ : 125^\circ 45' = 42' : p$, четвертое пропорциональное число $p = 29' 20''$ будетъ число минутъ и секундъ, которыми уголъ A уменьшить должно.

жно. Пошомъ $180^{\circ} : 34^{\circ} 40' = 42' : q = 8' 5''$. Слѣдовательно число минутъ и секундъ, которыми уголъ Е убавишь должно, будетъ $= 4' 20''$, по сему въ выкладкахъ должно положить $A = 125^{\circ} 15' 40''$ уголъ $ABE = 34^{\circ} 31' 55''$, и уголъ $AEB = 20^{\circ} 12' 25''$. равнымъ образомъ попралять надлежитъ углы въ прочихъ треугольникахъ, ежели кто вторично вымѣрялъ иже углы труда на себя принять не хочешь.

76) При начерченіи плана сферъ взаимнаго положенія примѣчанія достояныхъ мѣствъ, требуется и положеніе ихъ въ разсужденіи странъ свѣта. Къ познанію сего по большей части употребляется компасъ, потому что стрѣлка концами своими склоняясь къ полюсамъ земнымъ, представляетъ меридіанъ мѣста, надъ которымъ центръ ея стоитъ, и когда спавешь лицомъ къ сѣверу, которой всегда на стрѣлкѣ означается особливимъ знакомъ, то въ правой сторонѣ будетъ востокъ, въ лѣвой западъ, а позади югъ. И такъ когда чрезъ одно которое нибудь мѣсто на бумагѣ проведена будетъ меридіональная линия, то видно будетъ положеніе прочихъ въ разсужденіи странъ свѣта. Чтобъ на планѣ начерченномъ провести меридіональную линію, ничего больше не требуется какъ замѣнить положеніе стрѣлки въ разсужденіи котораго нибудь другаго мѣста, на примѣръ ежели бы примѣче-

но было, что поставя компасъ въ точкѣ А, мѣсто В склоняется отъ стрѣлки въ правую сторону на 60° , то на бумагѣ должно только провести линію АР такъ, чтобъ уголъ РАВ равенъ былъ 60° : Такимъ образомъ видно будетъ, которыя мѣста лежатъ къ востоку и которыя къ западу. Мѣсто, котораго меридіанъ представляется, обыкновенно беретъ япо, отъ котораго дѣйствія начинаются. Польза и способность, которую въ подобныхъ случаяхъ опредѣленіе меридіана приобщитъ, принуждающъ меня предложить слѣдующую задачу.

Задача 23.

Fig 35. 77) Найти положеніе точки В изъ разсужденій меридіана и круга Экватору параллельнаго чрезъ точку А проходящаго.

Рѣшеніе.

Когда поставишь центръ компаса надъ почкою А, то стрѣлка будетъ означать меридіанъ мѣста А который пусть будетъ АР. и положимъ что иголка Р склоняется къ сѣверному полюсу, линія ад перпендикулярная къ линіи АР будетъ означать часть круга экватору параллельнаго чрезъ тоже мѣсто А проходящаго. Изъ точки В къ упомянутымъ кругамъ проводи перпендикулярныя линіи Ва и Вб, которыя ежели опредѣлены будутъ, то и положеніе точки В будетъ извѣстно,

извѣстно, на сей концѣ должно вымѣрять или найти разстояніе AB , и по компасу наклонение линіи AB къ меридіану. Такимъ образомъ въ треугольникѣ прямоугольномъ BAR , когда линія AB , и уголъ PAB извѣстны будутъ, то линіи $Ab = aB$ и $Bb = Aa$ найдутся чрезъ посылки.

$$A/ \quad \sin tot : \sin bAB = AB : Bb$$

и $\sin tot : \sin Bb = AB : Ab.$

Примѣчаніе.

78) Хотя разстоянія Ab и Bb разсуждая по строгости геометрической должны быть дуги, но для малости безъ малѣйшей погрѣшности за прямыя линіи почитать должно. Большая погрѣшность произойти можетъ ежели къ опредѣленію меридіана употребленъ будетъ одинъ компасъ, потому что магнитная стрѣлка почти никогда точнаго полюа не показываетъ, и на одномъ и томъ же мѣстѣ склонение съе перемѣняетъ, и для того кто о точности старается къ опредѣленію меридіана, можетъ употреблять слѣдующей способъ. Пусть будетъ точка O , которъ и меридіанъ опредѣлить должно. Изъ точки O , какъ центра на горизонтальной плоскости опиши два круга или болѣе, и въ центрѣ ихъ O поставь перпендикулярно къ плоскости шпильку ov , потомъ прежде полудни замѣть на кругахъ точки s, c , въ которыхъ ибнъ

отъ самаго верьху шпильки на плоскость падающая соединяется съ окружностями помянутыхъ круговъ ; тожъ должно учинить и послѣ полудни , зачѣтивъ точки d и f , и на конецъ дуги cd и ef раздѣлитъ на двѣ равныя части линія NO чрезъ центръ O и точки N и P проходящая будетъ означать меридіанъ мѣста.

72) Ежели точки N и P такое будутъ имѣть положеніе , что чрезъ одну какую нибудь и центръ проведенная прямая линія , не упадетъ на другую , то протянувши линіи OP , ON уголъ между ими содержащейся должно раздѣлитъ на двѣ равныя части , линія MO будетъ означать меридіанъ мѣста. Опредѣливши положеніе меридіана можно будетъ узнать сколь велико склоненіе магнитной стрѣлки отъ меридіана. Въ прочемъ я не думаю , чтобъ сіе превазо извѣщенія , коимъ образомъ когда чрезъ точку A меридіанъ проведенъ , помощью аспроляби узнать можно наклоненіе къ скому линіи AB . Употребленіе меридіана въ слѣдующей задачѣ видно будетъ.

Задача 24.

80) Знать планъ фигуры , которой всѣ бока и углы между боками содержащіяся извѣстны.

Рѣше-

Рѣшеніе.

Пусть будетъ фигура $ABCDE$, въ которой **Fig.**
 одни бока и углы между ими содержащіяся вы- 37.
 мѣрять можно. Мѣста A , откуда начало дѣй-
 ствій учинено, опредѣли меридианъ, которой
 пусть будетъ AP , и наклоненіе линіи AB къ
 меридіану. Тогда въ треугольникѣ прямоуголь-
 номъ ABb бока AB и всѣ углы будутъ избыт-
 ны, и для того линіи $Ab = aB$ и $Bb = aA$, или
 разстоянія точки B отъ меридіана AP и круга
 экватору параллельнаго aAf найдены будутъ
 чрезъ посылки $\sin tot : \sin BAb = AB : Bb$; $\sin tot :$
 $\sin ABb = AB : Ab$: Потомъ когда изъ ABC выч-
 тешь уголъ ABb , останется уголъ CBb ; поему
 въ треугольникѣ прямоугольномъ BCc бока Bc и
 Cc найдутся чрезъ посылки, $\sin tot : \sin CBc =$
 $CB : Cc$; $\sin tot : \sin BCc = CB : cB$, и разсто-
 яніе точки C отъ меридіана AP будетъ $= cb$
 $= Bb - Bc$, а разстояние отъ круга af будетъ
 $Ab + Cc$. Теперь ежели изъ угла B выч-
 тешь уголъ BCc , останется уголъ DCc , и въ
 треугольникѣ CDd бока Dd и Cd найдутся
 посылками $\sin tot : \sin DCd = DC : Dd$, и $\sin tot :$
 $\sin CDd = CD : Cd$: разстояние точки D отъ
 меридіана AP будетъ $Dd - cb = Dd - Bb + Bc$,
 а разстояние отъ круга af будетъ $= Ab + Cc$
 $- Cd$. Понеже уголъ dDC избытченъ и уголъ
 dDg прямой, то ежели изъ EDC събьмешь
 уголъ $90^\circ + dDc$, останется уголъ gDE , и въ
 треугольникѣ EDg избытчны будутъ вѣтвы

и бокъ ED , и по тому найдены будутъ Eg и Dg чрезъ послышки $\sin tot : \sin EDg = ED : Eg$, $\sin. tot : \sin DEg = ED : gD$. По сему раз тоя-
нїе точки E отъ меридіана будетъ $Eg + gc =$
 $Eg + Dd - Bb + Bc$. и отъ круга экватору па-
раллельнаго $Ef = Ab + Cc - Cd - gD$ Такимъ
образомъ разстоянїе каждаго мѣста отъ помяну-
тыхъ круговъ найдутся. По сему ежели на бума-
гѣ проведешь двѣ линїи, изъ которыхъ бы одна
меридіанъ мѣста A , а другая кругъ экватору
параллельной представляла, то разстоянїя каж-
даго мѣста отъ помянутыхъ линїи по умень-
шенному масштабу на бумагѣ означить, и
планъ начертить можно.

Примѣчаніе

81) Подобной способъ можно упот-
ребить къ рѣшенію выше сего предло-
женнаго случая. Когда по вымѣрїи над-
лежащихъ линїи и угловъ планъ дѣлать дол-
жно, то сомнѣнїе произойти можетъ а осеб-
ливо когда фигура будетъ многугольна, въ
которую сторону нагримѣръ линїю BC къ
линїи AB подъ угломъ ABC поставить дол-
жно. Но неже меридіаны точекъ A , B , C и
пр: за параллельные между собою почитать
должно, сїе сомнѣнїе легко опровержено быть
можетъ, ежели при всякомъ поворотѣ помо-
щїю компаса примѣчено будетъ, въ которую
сторону линїя, которую мѣрять слѣдуетъ,
отъ меридіана мѣста склоняется. Такимъ об-
разомъ

разомъ о всякомъ бокѣ извѣстно будетъ , какъ его на бумагу положить должно. Вѣрно ли углы A, B, C, D и пр : гымѣряны можно узнать по § 75 Геом :

82) Къ сняманію плановъ съ не большихъ мѣстъ , которыхъ примѣчанія достойныя мѣста , изъ одного или двухъ мѣстъ видны , употребляется иногда Геметрической столикъ съ мишенями на троенной подставкѣ , на которомъ линіи проводятся , и планъ изображается. Употребленіе онаго видно будетъ изъ слѣдующей задачи.

Задача 25.

83) Задать планъ фигуры не правильной прямолинейной , которой нѣтъ углы изъ двухъ мѣстъ видны.

рѣшеніе.

Пусть будетъ фигура $ABCD$, и мѣста, Fig. изъ которыхъ углы фигуры видны O и F . 39.

1) Поставь столикъ горизонтально , и такъ , чтобъ внизу столика висящей оплѣсъ и почка , около которой мишени обращаются , соответствовала точкѣ O .

2) Обращая мишени наводи на каждой уголъ фигуры , и на столикъ проводи скользящія къ угламъ A, B, C, D , и мѣсту F линіи Oa, Ob, Oc, Od, Of .

3) Вымѣряй разстояніе OF , и по размѣру геометрическому перенеси ее на проведенную на столикѣ линию Of , которая пусть будетъ Oe .

4) Перенеси столикѣ на E , и поставь такъ чтобъ точка e соотвѣтствовала точкѣ F , и точка O точкѣ E : потомъ обращая мишени около точки F наводи на каждой уголѣ фигуры, и на столикѣ проводи склоняющіяся къ нимъ линіи $Fa, Fe, F\gamma, F\delta$, которыми прежнія гдѣ нибудь пересѣчены будутъ.

5) На концѣ точки a, b, γ, δ , соедини прямыми линіями $ae, b\gamma, \gamma\delta, a\delta$, такъ чтобъ ae содержалась между линіями FA, FB , линія $b\gamma$ содержалась между линіями FB, FC , линія $\delta\gamma$ между линіями FA, FC и линія $a\delta$ между линіями FA, FD Фигура $ae\gamma\delta$ будетъ подобна фигурѣ $ABCD$ или ея планѣ.

Примѣчаніе

84) Подобныхъ задачъ множество вымыслить можно перемѣняя данныя вещи, но мы объ сныхъ говорить пространно нѣтъ нужды, для того что во всѣхъ почти книгахъ, до практической геометріи касающихся, пространствѣ, нежели бы какъ надлежало о сей матеріи, предлагается Кто доволное имѣетъ знаніе теоретической Геометріи

метрѣи потѣ по перемѣнѣ данныхъ вещей и рѣшеніе пристойнымъ образомъ самѣ перемѣнить можеть. Я думаю, что больше услужу читателю, когда присовокуплю о сей мѣтрѣи рѣшенія такихъ задачъ, которыя не во всякой книгѣ найти можно.

Задача 26.

85) Если дано будетъ разстояніе АВ, которое идти можно изъ точекъ С и Fig. D, опредѣлить планное положеніе мѣстъ С 39. D, и мѣстъ а, в, с, d, не мѣняя разстоянія CD и другихъ линий изъ мѣстъ а, в, с, d заключающихся.

Рѣшеніе.

Изъ точекъ С и D вымѣряя въ потребные углы положи по глазомѣру, сколько разстояніе CD содержитъ въ себѣ саженей, футовъ или дюймовъ. Потомъ вымѣряя величину угловъ ACD, ADB такъ и углы BDC и ADB, въ треугольникахъ ACD и CED можно будетъ опредѣлить въ прочихъ части, то есть линии AD, CB, AC и BD, а потомъ изъ треугольника ACB или ADB найти длину линии АВ, которая, понеже CD положена по глазомѣру, должна будетъ разнствовать отъ настоящей длины линии АВ, и для того истинная длина линии CD найдется чрезъ посылку. Какъ найденная длина линии АВ

къ сущей длинѣ тойже лини, такъ длина по глазомеру пзятая лини CD, къ четвертому пропорціональному, которое будетъ сущая длина лини CD. Опредѣливъ линию CD положеніе мѣстъ а, в, с, и пр: опредѣлить будетъ можно (§ 83).

Примѣръ.

86) Пусть будетъ $AB=2625$, уголъ $ACD=100^\circ$, $ACB=57^\circ$, $BCD=43^\circ$, уголъ $BDC=115^\circ$, $BDA=60^\circ$, $ADC=55^\circ$, то будетъ $CAD=25^\circ$, $CBD=22^\circ$. Положимъ $CD=1500$; чтобъ излишнихъ выкладокъ не дѣлать, изъ треугольника ACD сыщемъ бокъ AD , и изъ треугольника CBD бокъ CB , дабы изъ треугольника ACB можно было сыскать AB . По сему.

въ треуг ACD будетъ

$$\sin ACD : \sin ADC = CD : AC$$

$$\sin ADC = 0.9133645$$

$$1CD = 1.1760913$$

$$13.0894558$$

$$\sin ACD = 0.6259483$$

$$1AC = 3.4635075$$

$$\text{откуда } AC = 2907.421$$

въ треугольникѣ BCD

$$\sin CBD : \sin BDC = CD : CB$$

$$\sin BDC = 0.9572757$$

$$1CD = 1.1760913$$

$$13.1333670$$

$$\sin CBD = 0.5735754$$

$$1CB = 3.5597916$$

$$CB = 3629.04$$

Въ треугольникѣ ACB вѣдая бока AC , CB и уголъ ACB по § 53 Триг: посылашь должно.

CB

$$CB + AC : CB - AC = \operatorname{tang}^{\frac{1}{2}}(CAB + ABC) : \operatorname{tang}^{\frac{1}{2}}(CAB - ABC)$$

$$\begin{array}{l} \operatorname{I} \operatorname{tang}^{\frac{1}{2}}(CAB + ABC) = 10.2652356 \\ \operatorname{I}(CB - AC) = 2.8583086 \end{array}$$

$$13.1235442$$

$$\operatorname{I}(CB + AC) = 3.8153147$$

$$\operatorname{I} \operatorname{tang}^{\frac{1}{2}}(CBA - BAC) = 9.3082295 = 11^{\circ} 29' 38''$$

Откуда найдется уголъ $CAB = 72^{\circ} 49' 38''$
и уголъ $ABC = 50^{\circ} 0' 22''$. Потомъ чтобъ
найти AB посылай

$$\sin ABC : \sin ACB = AC : AB$$

$$\operatorname{I} \sin ACB = 9.9235914$$

$$\operatorname{I} AC = 3.4635075$$

$$13.3870989$$

$$\operatorname{I} \sin ABC = 9.8843027$$

$$\operatorname{I} AB = 3.5027962, \text{ и } AB = 3182,7.$$

По сему положению разстояние AB происхо-
дитъ больше, нежели истинное, которое
должно быть 2625; следовательно CD поло-
жено болѣе надлежущаго. Чтобъ опредѣ-
лить точное, посылай

$$3182,7 : 2625 = 1500 : CD$$

$$\operatorname{I} 1500 = 3.1760913$$

$$\operatorname{I} 2625 = 3.4191293$$

$$6.5962206$$

$$\operatorname{I} 3182,7 = 3.5027962$$

$$\operatorname{I} CD = 3.0924244$$

Ы 4

Отку-

Откуда $CF = 1237,18$. Нашедъ истинную длину разстоянія CD взаимное положеніе мѣста a, b, c и d или планъ по § 83 здѣлать будетъ можно.

Задача 27.

87) Определить въ разсужденіи даннаго треугольника ABC положеніе мѣста O , изъ котораго исъ углы треугольника видны.

Рѣшеніе.

Въ сей задачѣ три случая быть могутъ, точка O или внѣ треугольника, или внутрѣ, или на которой нибудь бока упасть можетъ.

Fig. 40. Случай 1.) Представь себѣ, что чрезъ точки B, C и O описанъ кругъ, и проведены линіи OA, OB, OC , попомъ BD и CD : уголъ AOB , которой вымѣрять можно, будетъ $=$ углу BCD , и уголъ AOC , которой также вымѣрять можно, $=$ углу CBD ; и такъ въ треугольникѣ BDC извѣстенъ будетъ бока BC и углы при концахъ бока находящея, по сему можно будетъ опредѣлить бока CD и BD . Потомъ въ треугольникѣ ABD два бока извѣстны и уголъ $ABD = ABC - CBD = ABC - AOC$, слѣдовательно всѣ части треугольника опредѣлить можно. Равнымъ образомъ найдется треугольникъ

никъ ADC , и слѣдовательно въ треуголь-
никахъ AOB , AOC бока BO и CO .

Случай 2) Представь себѣ, что чрезъ Fig.
точку O , и чрезъ которые нибудь углы 41.
треугольника описанъ кругъ, тогда вымѣ-
ряя уголъ AOB , будемъ извѣстны и уголъ
 $BOD = BCD$; и вымѣряя уголъ AOC , бу-
демъ извѣстны уголъ $COB = CBD$. и такъ
въ треугольникѣ BOD извѣстны будутъ бока
 BO и углы BOC и BOD , по сему можно
найти бока BD и DC . Потомъ въ треу-
гольникѣ ABD извѣстны будутъ бока AB ,
 BD и уголъ $ABD = ABC + CBD = ABC + COB$
и для того найдется бока AD и уголъ BAD ;
равнымъ образомъ найдутся части треуголь-
ника ACD , и слѣдовательно треугольниковъ
 AOB и AOC .

Случай 3.) Если мѣсто зрителя бу- Fig.
детъ на бока треугольника CB , то какъ 42.
прежде представивъ себѣ кругъ чрезъ точки
 A , B , O проходящей, и вымѣряя уголъ AOB
въ треугольникѣ AOB будутъ даны всѣ углы
и бока AB . По сему бока AO и OB , а по-
томъ и CO опредѣлить можно.

Задача 28.

88) Данную прямолинейную фигу-
ру раздѣлится на сколько нибудь равныхъ
частей.

Рѣшеніе.

Пусть будетъ фигура **ABCDE**, и по-
Fig. ложимъ, что должно ее раздѣлить на три
43. равныя части. Надлежитъ сыскать 1) пло-
 щадь фигуры; и раздѣлить на столько рав-
 ныхъ частей, на сколько фигуру раздѣлить
 должно.

раздѣлѣть фигуру на 3
 2) ~~Третьей~~ ^{изъ половины} части возьми половину,
 изъ ~~половины~~ ^{изъ половины} вычти площадь треугольника
AED, попомъ остатокъ раздѣли на $\frac{1}{2}$ **AD**,
 найдется высота треугольника **AID**, копо-
 рой съ треугольникомъ **ADE** составитъ
 третью часть фигуры, и для того въ раз-
 стояніи найденной высоты линіе **AD** прове-
 ди параллельную линію, которая гдѣ ни-
 будь пересѣчетъ линію **AB**, пусть будетъ
 точка **I**, въ которой линія **AB** пересѣчется,
 и для того ежели проведешь линію **DI**, фи-
 гура **DEIA** будетъ третья часть.

3) Найденную прежде сего шестую часть
 фигуры раздѣли на $\frac{1}{2}$ **DI**, и произойдетъ
 высота треугольника **IKD**: въ разстояніи най-
 денной высоты линіе **ID** проведи параллельную,
 которою опреѣлена будетъ точка **K**. Вымѣ-
 рявъ линію **DK**, раздѣли на ~~одну~~ ^{одну} шестую
 часть площади фигуры, и найдется высота
 треугольника **KLD**, равнаго шестой части фи-
 гуры, и для того въ разстояніи найденной
 высоты проведи параллельную линіе **KD**, и
 означится точка **L**.

4) Проведи линію KL , и будетъ фигура $DIKI$ равна третей части фигуры. Равнымъ образомъ поступать надлежитъ, ежели данную фигуру должно будетъ раздѣлить на большее число частей.

Примѣчаніе 1.

89) Ежели треугольникъ, отъ котораго дѣленіе начинается больше будетъ третей части фигуры, то ее должно вычесть изъ площади треугольника, и осталая площадь будетъ площадь треугольника, которую вычесть должно изъ треугольника AED , чтобъ остатокъ былъ равенъ третей части фигуры. Изъ рѣшенія само собою видно, что дѣленіе можно начать отъ каждаго угла. Чтобъ данную на поверхности земной прямолинейную фигуру раздѣлить на нѣсколько равныхъ частей, надлежитъ на бумагѣ начертить ей подобную, и по предписаннымъ выше сего правиламъ раздѣлить на данное число частей. Такимъ образомъ когда на бумагѣ дѣленіе совершится, то и на поверхности земной точки I , K и L по величинѣ линіей AI , IK и DL означить будетъ можно.

90) Къ рѣшенію сей задачи надлежитъ папередъ найти площадь фигуры, которая произойдетъ, ежели площади всѣхъ треугольниковъ фигуру составляющихъ сложены будутъ въ одну сумму. А чтобъ каждаго

даго треугольника площадь опредѣлить можно было, надлежитъ взявши бокъ которой нибудь за основаніе найти высоту. Въ семъ случаѣ ежели фигура раздѣлена будетъ на треугольники AED , ADC и ACB , и линіи AD и AC взяты будутъ за основанія, перпендикулярныя къ основаніямъ линіи EH , DG , BF будутъ высоты, которыя всегда найти можно, ежели довольно число частей къ начертанію подобной фигуры будетъ извѣстно. Въ первомъ случаѣ, когда изъ одного бока фигуры, и угловъ треугольниковъ планъ дѣлается, высоту каждого треугольника найти можно слѣдующимъ образомъ. Пусть будетъ данной бокъ AE и углы AED , EDA , ADC , DCA , ABC вымѣрены, начиная отъ треугольника AED , каждого треугольника всѣ бока и углы по Тригонометріи опредѣлить можно, и для того когда въ треугольникъ AED вѣдая бокъ AE и уголъ EAH , высота EH найдется посылкою $\sin tot: AE = \sin EAH: EH$. Подобнымъ образомъ въ каждомъ треугольникѣ высоту опредѣлить можно, слѣдовательно и площадь фигуры. Что заѣсь говорено о первомъ случаѣ не трудно можно приложить и къ другому.

Примѣчаніе 2.

21) Выше сего упоминалъ, что нерѣдко случается, что инструмента которымъ углы мѣраются, не можно такъ поставить, чтобъ

чтобъ центръ данаго спсала надъ точкою , нацъ которою спсать долженъ , и для того принуждены бываемъ на нѣкоторое разстояние отступать отъ того мѣста , какъ на примѣръ на аршинъ , на сажень и болѣе. Въ такомъ случаѣ , чѣмъ болѣе отъ центра мѣста отступаемъ , тѣмъ болѣе разсѣвующей мѣряемъ уголъ отъ того , кошорой бы мѣрять надлежало. Въ подобныхъ случаяхъ вымѣранный уголъ всегда поправлять надлежитъ.

92) Центръ инструмента въ разсужденіи Fig. центра мѣста или точки на земли назначен- 44- ной разныя можетъ имѣть положенія. Положимъ что должно вымѣрять уголъ ACB , то центръ инструмента можетъ соотвѣтствовать 1) точкѣ O падающей на линію соединяющую точку C и которое нибудь изъ мѣстъ A или B . Въ такомъ случаѣ вмѣсто ACB вымѣряя будетъ уголъ AOB , больше нежели ACB : потому что $AOB = ACB + OAC$, и $ACB = AOB - OAC$. следовательно уголъ надлежащій ACB произойдетъ ежели изъ угла AOB вышется уголъ OAC . а ежели центръ инструмента соотвѣтствовать будетъ точкѣ E , то уголъ ACB найдется , ежели къ вымѣрному AEB приданъ будетъ уголъ CAE .

2) Центръ инструмента можетъ Fig. спсать внутри угла AOB , надъ точкою 45. O , которая падаетъ на линію COF проходящую

дѣющую между мѣстами А и В, въ такомъ случаѣ уголъ АОВ будетъ больше нежели АСВ суммою угловъ ОАС и ОВС, потому что $\angle AOF = \angle ACO + \angle OAC$, и $\angle BOF = \angle BCO + \angle OBC$. И для того, чтобъ опредѣлить величину угла АСВ изъ вымѣряннаго АОВ должно вычесть углы ОАС и ОВС, и останется истинной уголъ АСВ. А ежели центръ астролябіи будетъ надъ точкою Е, то къ углу АЕВ должно будетъ прибавить углы САЕ и СВЕ, и произойдетъ уголъ АСВ.

Fig. 3) Ежели центръ инструмента
46. стоятъ будетъ въ угла надъ точкою О, то вмѣсто угла АСВ вымѣрянь будетъ уголъ АОВ, которой меньше угла АСВ угломъ ОАС, потому что $\angle AGB = \angle AOB + \angle OAC$, следовательно $\angle AOB = \angle AGB - \angle OAC$, а уголъ $\angle AGB = \angle ACB + \angle OBC$, откуда $\angle ACB = \angle AGB - \angle OBC$. Но $\angle AGB = \angle AOB + \angle OAC$ следовательно $\angle ACB = \angle AOB + \angle OAC - \angle OBC$. Изъ сего явствуетъ, что ежели изъ суммы угловъ АОВ и ОАС вычтется уголъ ОВС, произойдетъ уголъ АСВ.

93) Чтобъ можно было опредѣлять малыя углы, отъ которыхъ поправки зависѣтъ, надлежитъ во первыхъ знать разстояніе инструмента отъ точки С, потомъ въ случаѣ первомъ уголъ АОС, во второмъ и третьемъ углы АОС и ВОС, которые вѣрно вымѣрять можно, и на послѣдокъ

Fig. 44

докъ разстоянія АО и ОВ, которыхъ величину напередъ другимъ образомъ какъ глазомъ опредѣлить не можно. И хотя глазомъ мѣряя разстояніе АО около трехъ или четырехъ верстѣ, случится на 100 или 200 саж: ошибиться, однакожъ чувствительной погрѣшности въ уголѣ ОАС опасаться не должно. Чтобы сіе самымъ дѣломъ показать, положимъ $СО = 2$ саж: разстояніе АО, которое почти равно разстоянію $АС = 4$ верст: $= 2000$ саж: уголъ $АОВ = 130^\circ$, слѣдовательно уголъ $АОВ = 50^\circ$ и чрезъ посылку

$$\begin{aligned} \frac{АО + ОС}{АО - ОС} &= \frac{\tan \frac{1}{2}(АСО + САО)}{\tan \frac{1}{2}(АСО - САО)} \\ 1 \tan \frac{1}{2}(АСО + САО) &= 10.3313275 \\ 1(АО - ОС) &= \frac{2.3005055}{13.6319230} \\ 1(АО + ОС) &= \frac{3.3014641}{10.3304589} \\ 1 \tan \frac{1}{2}(АСО - САО) &= 10.3304589 \end{aligned}$$

Найдется уголъ $ОАС = 2' 39''$. Положимъ, что глазомъ мѣряя разстояніе АО ошибенось на 120: и для опредѣленія угла ОАС положено $АО = 1880$ саж: то будетъ $АО + ОС = 1882$, $АО - ОС = 1878$, и найдется $1 \tan \frac{1}{2}(АОС - САО) = 10.3104135 = 64^\circ 57' 13''$. Откуда уголъ $ОАС = 2' 47''$, разность отъ сего положенія будетъ $8''$, кошорую и въ самыхъ строгихъ размѣреніяхъ презрѣть можно. Сверхъ сего, ежели кому въ подоб-

подобныхъ случаяхъ выше сего найденная разность покажется велика, то вымѣряя протіе углы треугольника, уголъ ABC еще поправитъ будетъ можно. Изъ предложеннаго примѣру явствуетъ, какъ при другихъ случаяхъ поступать надлежитъ.

94) Если мѣста, на которые зритель наводитъ, чтобъ уголъ вымѣрять не будутъ на горизонтѣ, или плоскости, на которой зритель находится, и на которую падаетъ линия, которой длину опредѣлить должно, то уголъ инструментомъ взятой надлежитъ приводить къ горизонту, то есть опредѣлить вымѣряяному углу соответствующей на горизонтѣ. Чтобъ сіе изъяснить, положимъ, что плоскость бумаги или BOD представляетъ горизонтальную плоскость, на которой зритель находится въ точкѣ O , и мѣряетъ уголъ AOC , гдѣ AB и CD представляютъ двѣ высоты къ горизонту перпендикулярныя, B и D основанія на горизонтѣ находящіяся, A и C верхи, на которые зритель наводитъ. Само собою видно, что уголъ на горизонтѣ BOD будетъ со всѣмъ другой величины, нежели мѣряемый уголъ AOC , и понеже точки A и C различныя въ разсужденіи горизонта положенія имѣть могутъ, различныя отъ шуду задачи произойдутъ.

Fig.
47.

Задача 29.

95) Если точки A и C изъ мѣста Fig. 47. O будутъ казаться нарочно отстоять отъ горизонта, т. е. какъ высота AB , такъ и высота CD будутъ казаться подъ равными углами, изъ данного угла AOC найти уголъ BOC на горизонтѣ углу AOC соответствующей.

Рѣшеніе.

Понеже высоты AB и CD кажутся подъ равными углами, то ни уголъ AOC , ни BOC не перемѣнится, если представишь, что на линіи OD въ разстояніи $OP=OB$ находится высота PQ , уголъ AOQ будетъ равенъ углу AOC , $BOQ=BOC$, и $AB=PQ$. Проведи линіи AQ и PB , изъ которыхъ PB будетъ на горизонтальной плоскости, а AQ на вертикальной и линіи PB параллельна: Поэтому, понеже ABO треугольникъ прямоугольной, то будетъ.

$$\sin. tot: \sin. BAO = AO: OB.$$

Проведи линію OF , которая бы уголъ AOQ \dots AOC и линію AQ раздѣляла на двѣ равныя части, изъ центра O разстояніемъ OF опиши дугу BE , и проводи EN параллельную линіи AF , то треугольники AOF и EOH будутъ прямоугольны и подобны между собою и потому.

б

АО:

$$AO:EO=AF:EH \text{ или}$$

$$AO:OB=BG:EH$$

$$\text{но } BG:EH=\sin BOG:\sin EOH$$

откуда $AO:OB=\sin BOG:\sin EOH$, но выше
сего было $\sin tot:\sin BAO=AO:OB$

$$\text{следоват: } \sin tot:\sin BAO=\sin BOG:\sin EOH,$$

$$\text{или } \sin BAO:\sin tot=\sin EOH:\sin BOG.$$

Нашедши уголъ $BOG=\frac{1}{2}BOD$, ищѣлой BOD
уголъ будетъ извѣстенъ.

Примѣръ.

96) Пусть будетъ уголъ $AOB=COD$
 $=2^{\circ} 35'$, $AOB=AOQ=65^{\circ} 28'$, то про-
изойдетъ $BAO=87^{\circ} 25'$, $EOH=32^{\circ} 44'$.

$$\sin EOH=9.7329803$$

$$\sin. tot=10.0000000$$

$$\hline 9.7329803$$

$$\sin BAO=9.9995584$$

$$\sin BOG=9.7334219=32^{\circ} 46' 15''.$$

Слѣдовательно уголъ $BOD=65^{\circ} 32' 30''$.
Подобнымъ образомъ поступать надлежитъ,
если бы точки были ниже горизонта.

Задача 30.

Fig.

48. 97) Если одна точка А будетъ
выше горизонта, а другая С на горизонтѣ
или

или на той же самой плоскости, на которой зритель находится, пымѣяпѣ уголѣ АОС найти уголѣ ВОС на горизонтѣ, углу АОС соответствующей.

Рѣшеніе.

Изъ точки А перпендикулярная линия къ горизонту пу тѣ будетѣ АВ. Изъ точки В къ линіѣ ОС проведи перпендикулярную ВЕ; ежели изъ А къ точкѣ Е протянешь линію АЕ, то уголѣ АЕО будетѣ прямой. —
Потомѣ въ треугольникѣ АОВ будетѣ

$$ОВ : ОА = \sin ОАВ : \sin tot.$$

въ тр : ОАЕ $ОА : ОЕ = \sin tot : \sin ОАЕ$ откуда

$$ОВ : ОЕ = \sin ОАВ : \sin ОАЕ$$

Потомѣ изъ треугольника ОВЕ будетѣ

$$ОВ : ОЕ = \sin tot : \sin ОВЕ$$

слѣдоват : $\sin ОАВ : \sin ОАЕ = \sin tot : \sin ОВЕ.$

По сей посылкѣ можно будетѣ найти уголѣ ВОЕ на плоскости горизонтальной углѣ АОС соответствующей, для того что $\sin ОВЕ = \cos ВОЕ.$

Примѣръ.

98) Пусть будетѣ $АОВ = 3^{\circ} 12'$,
 $АОС = 59^{\circ} 30'$, то будетѣ $ОАВ = 86^{\circ} 48'$,
 $ОАЕ = 30^{\circ} 30'.$

$$\begin{aligned} 1 \sin tot &= 10.0000000 \\ 1 \sin OAE &= 9.7054689 \\ &\underline{19.7054689} \\ 1 \sin OAB &= 9.9993223 \\ 1 \sin OBE &= 9.7061466 \end{aligned}$$

Откуда $OBE = 30^\circ 33' 9''$. Слѣдова-
тельно $BOC = 59^\circ 26' 51''$.

Задача 31.

Fig. 49. 29) Если точки А и С будутъ выше
плоскости горизонтальной, и не равно от-
стоять отъ горизонта, изъ даннаго угла
АОС найти уголъ ВОD на горизонтѣ, соот-
вѣствующей углу АОС.

Рѣшеніе.

Пусть будетъ плоскость горизонталь-
ная ВОD или плоскость на которой зритель
будучи въ точкѣ О мѣряетъ уголъ АОС, и
высота АВ кажется подъ угломъ АОВ, а
высота СD подъ угломъ СОD. Понеже уголъ
АОВ не переменится, ежели представишь,
что на линіи ВО въ разстояніи ОQ=OD на-
ходится высота PQ, ниже уголъ QOD со-
отвѣствующей на горизонтѣ разстоявать
будетъ отъ угла ВОD; сверхъ сего, поне-
же отъ длины линей ОР, ОС не зависятъ
помянутые углы, то положивъ ІС по произво-
ленію какой нибудь длины, изъ тре-
угольника

угольника OPC опредѣли бока OP , OC . Потомъ изъ треугольниковъ POQ , COQ сыщи лини PQ и CE въ той же мѣрѣ, къ которой PC относится. Потомъ представь, что лини CE параллельна лини DQ найдется PZ посылая

$$PE : PQ = PC : PZ$$

и точка Z будетъ на горизонтѣ. Изъ треугольника PZ , на одной плоскости съ треугольникомъ POC находящегося, можно будетъ опредѣлить уголъ POZ и ему соответствующей на горизонтѣ QOZ . Савнымъ образомъ углу $COZ = POZ - POC$ найдется уголъ соответствующей на горизонтѣ DOZ (§ 27) и ежели изъ угла QOZ вычтемся уголъ DOZ , то останется искомой уголъ.

Примѣръ.

100) Пусть будетъ $POC = 30^\circ$, $AOB = 60'$, $COQ = 30'$, $PC = 4000$, то будетъ $OPC = PCO = 75^\circ$, лини $OP = OC$ найдется чрезъ посылку

$$\begin{aligned} \sin POC : \sin PCO &= PC : OP = OC \\ \sin PCO &= 9.9849438 \\ \sin POC &= 9.6989700 \\ \hline OP &= 3.8880338. \text{ слѣд. } OP = 7727,4 \\ &\text{ въ } \text{ въ пре-} \end{aligned}$$

въ треугольникѣ POQ	въ треугольникѣ COD
$\sin. tot: \sin POQ = PO: PQ$	$\sin tot: \sin COD = OC: CD$
$1 PO = 3.8880338$	$1 OC = 3.8880338$
$1 \sin POQ = 8.2418553$	$1 \sin COD = 7.9488419$
12.1298891	12.8288757
$1 PQ = 2.3298891$	$1 CD = 1.8288757$
откуда $PQ = 134.8$	откуда $CD = 67, 4$

изъ сего явствуетъ , что $PQ = 2 CD$, для того что углы POQ и COD не велики , и потому въ посылкѣ

$$PE: PQ = PC: PZ$$

Можно положить $PE = 30$, $PQ = 60$. Не дѣлая выше сего помянутыхъ выкладокъ , но когда разность между углами будетъ простирается на нѣсколько градусовъ , то помянутыя выкладки неопмѣнно дѣлать дсужно. Къ семъ случаѣ найдемся $PZ = 8000$, и по сему въ треугольникѣ POZ даны будутъ бока PO, PZ , и для того, чтобъ опредѣлить уголъ POZ должно посылать.

$$PZ + PO: PZ - PO = \tan \frac{1}{2} (PZO + POZ) : \tan \frac{1}{2} (POZ - PZO)$$

$$1 \tan \frac{1}{2} (PZO + POZ) = 10.1150195$$

$$11 Z - PO = 2.4355258$$

$$12.5505453$$

$$1 (PZ + PO) = 4.1966569$$

$$1 \tan \frac{1}{2} (POZ - PZO) = 8.3538884 = 1^{\circ} 17' 38''$$

По сему уголъ POZ будетъ $= 53^{\circ} 47' 38''$, $COZ = 23^{\circ} 47' 38''$. Чтобъ изъ найденныхъ угловъ
найти

найти каждому соответствующей на горизонтѣ, по § 27 должно посылать.

$$\sin OPQ : \cos POZ = \sin \text{tot} : \sin QOZ \quad \text{ор}$$

$$1 \sin \text{tot} = 10.0000000$$

$$1 \cos POZ = 9.7714183$$

$$19.7714183$$

$$1 \sin OPQ = 9.9999338$$

$$1 \cos POZ = 9.7714845 \quad 36^\circ 13' 4''$$

и уголъ QOZ угла = $53^\circ 46' 56''$. Потомъ

$$\sin OCD : \cos COZ = \sin \text{tot} : \cos DOZ.$$

$$1 \sin \text{tot} = 10.0000000$$

$$1 \cos COZ = 9.9614223$$

$$19.9614223$$

$$1 \sin OCD = 9.9999835$$

$$\cos DOZ = 9.9614358 \quad 66^\circ 12' 40''$$

и уголъ DOZ = $23^\circ 47' 20''$. Следовательно углу POC или AOC соответствующей на горизонтѣ уголъ QOZ = $29^\circ 59' 36''$.

Задача 32.

101) Если зрителю изъ мѣста О точка А будетъ казаться выше горизонтальной плоскости BOD, а другая С ниже, изъ данного угла AOC, опредѣлится уголъ BOD соответствующей на горизонтѣ. Fig. 50.

Рѣшеніе.

Понеже длина линей AO, OC ни какой перемены въ углахъ BOA, DOC, AOC

и BOD не дѣлаетъ, положивъ $AO = CO$, возми по произволению AO или OC какой нибудь длины, и по величинѣ линей AO или OC изъ треугольниковъ прямоугольных AOB и COD опредѣли бока AB и CD. и помѣ отъ подобия треугольниковъ ABS и CDS будетъ.

$$AB : CD = AS : SC \text{ и } \\ AB + CD : CD = AC : SC$$

Изъ точки S, гдѣ линия AC горизонтѣ пересѣкаетъ, проведи SE параллельную линіе AO, и будетъ уголъ $AOC = SFC$. слѣдовательно уголъ $SEO = 180 - AOC$ и

$$AC : SC = OC : SE \text{ или } \\ AB + CD : CD = OC : SE$$

А понеже AO представляется $= OC$, то будетъ $SE = EC$, найдши EC извѣс на будетъ и линия OE, по сему въ треугольникѣ OES извѣстны будутъ бока OE, ES и уголъ OES слѣдовательно найдутъя углы SOC и AOS, изъ которыхъ каждому опредѣли соответствующей уголъ на горизонтѣ, коихъ сумма будетъ искомой уголъ.

Примѣръ.

102) Пусть будетъ какъ въ прежнемъ примѣрѣ $AOB = 60^\circ$, $DOC = 30^\circ$, $AOC = 30^\circ$, и положимъ $AO = CO = 4000$.

въ

въ треугол: AOBбудетъ въ треугольникѣ COD
 $\sin \text{ tot:} \sin AOB = AO : AB \quad \sin \text{ tot:} \sin COD = OC : OD$ 02: 2

$1 AO = 3.6020600$ $1 \sin AOB = 8.2418553$ $\hline 11.8439153$ $1 AB = 1.8439153$ откуда $AB = 69, 8$	$1 OC = 3.6020600$ $1 \sin COD = 7.9408584$ $\hline 11.5429184$ $1 OD = 1.5429184$ откуда $OD = 34, 9$
--	--

Изъ сего явствуемъ , что и здѣсь тоже самое имѣемъ мѣсто , что выше сего примѣчено , и для того въ посылкѣ.

$$AB + CD : CD = OC : EC$$

$$\text{будетъ } 3 : 1 = 4000 : EC = 1333, 3 = SE$$

откуда произойдетъ $OE = 2666, 7$ и уголъ $OES = 150^\circ$, и для того будетъ въ посылкѣ.

$$OE + SE : OE - SE = \tan^2 AOC : \tan^2 (OSE - SOE)$$

$$1 \tan^2 AOC = 9.4280525$$

$$1 OE - SE = 3.1249278$$

$$\hline 12.5529803$$

$$1 (OE + SE) = 3.6020600$$

$$1 \tan^2 (OSE - SOE) = 8.9509203 = 5^\circ 6' 10''$$

Слѣдовательно уголъ $SOE = 20^\circ 6' 10''$ и уголъ $AOS = 9^\circ 53' 50''$. Чтوبъ изъ оныхъ какому опредѣлить уголъ соотвѣтствующей на горизонтѣ должно посылать.

$$\sin OAB : \cos OAC = \sin tot : \cos BOS \quad 1.)$$

$$1 \sin tot = 10.0000000$$

$$\cos AOS = 9.993488c$$

$$19.9934880$$

$$1 \sin OAB = 9.9999338$$

$$1 \cos BOS = 9.9935542 = 80^\circ 9' 10''$$

следовательно угол BOS = $9^\circ 50' 50''$. Попомъ

$$\sin ODC : \cos SOC = \sin tot : \cos SOD \quad 2.)$$

$$1 \sin tot = 10.0000000$$

$$1 \cos SOC = 6.9727399$$

$$19.9727399$$

$$1 \sin ODC = 9.9999835$$

$$1 \cos SOD = 9.9727364 = 69^\circ 55' 1''$$

следовательно угол SOD = $20^\circ 4' 59''$

Примѣчаніе.

102) Изъ сихъ задачъ сверхъ особливато ихъ употребленія видѣшь можно, сколь велика погрѣшность произойти должна, ежели плоскость астролѣбии будетъ имѣть къ горизонту наклоненіе на одинъ или на два градуса, и изъ предложенныхъ примѣровъ явствуетъ, что погрѣшность отсюда производящую въ простой практикѣ безъ всякой опасности презрѣть можно.

К О Н Е Ц Ъ.



$$\sin AO = \sin AOS : \sin tot$$

$$\sin 50 = \sin 102 : \sin 100$$

$$\sin 50 = \sin 102 : \sin 100$$

$$\sin 50 = \sin 102 : \sin 100$$

погрѣшности.

стр.	строк.	напечатано	читай
10	26	тообъ	тобъ
15	8	чисто	часто
19	8	буаетъ	будетъ
23	1	66,9021	60,9021
29	13	чаемое	частное
33	12	15675	15674
34	10	71	72
36	посл.	знаки	знака
38	20	01,62	91,62
	22,23,24	70192	70242
41	8	$5\frac{31}{84}$	$5\frac{31}{84}$
43	17	$N=970894$	670894
40	20	605,82	26,34
47	23	$54288+$	$52317+$
51	посл.	оравнение	сравнение
52	9,13	сравнение	содержание
55	19	коли	количества
57	11	$B:A=C:D$	$B:A=D:C$
59	21	$B \times D \ A \times D$	$A \times D$
73	7	ломаное число	ломаного числа
75	21,23	$\frac{345}{713}$	$\frac{345}{713}$
76	16	A:B	B:A
80	21,23	степенни	степени
84	20	$30+5$	30×5
113	15	26	16
116	10	2×10	3×10
122	3	въ	объ
125	17	вънедостатокъ	вънедостаткѣ
126	7	въизбытокъ	вънедостаткѣ
	посл.	12	22

погрѣшности.

стр.	строк.	напечатано	читай-
127	23	погрѣшностей	положений
134	12	27, 9	9, 27
135	9	$M + {}_2N$	$M + {}_3N$
136	8	А и В одинъ	А и В вмѣ-
			стипь одинъ
137	1	$\begin{smallmatrix} n^3P & n^3P \\ m^3 & m^3 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} n^3P & n^4P \\ m^3 & m^4 \end{smallmatrix}$
142	10	употреблять.	употреблять
		Можно	можно.
166	22	ABC	ACB
168	3	ADE	ADC
170	6	ожетъ	можетъ
172	7	раздѣленія	размѣренія
	28	точки С	точки А
177	16	AOB	AOC
178	14	ACB	acb
	20	$b = cAB$	$b = cBA$
180	26	на D	на С
181	22	бакамъ	бокамъ
185	посл.	AB и CD	HG и IK
186	20	IHD	+ IHD
187	2	GKF	<i>плматъ</i>
	3	DKH	DKL
188	7	EML	END
190	1	линею AC	линею AB
	16	$ACD + ABC$	$ACD + ACB$
		+ BCE	+ BCE
196	посл.	AED	ACD.
198	8	EDG	CDG
	посл.	бокъ AC	бокъ BC
205	11	CB	CE

стр.

погрѣшности.

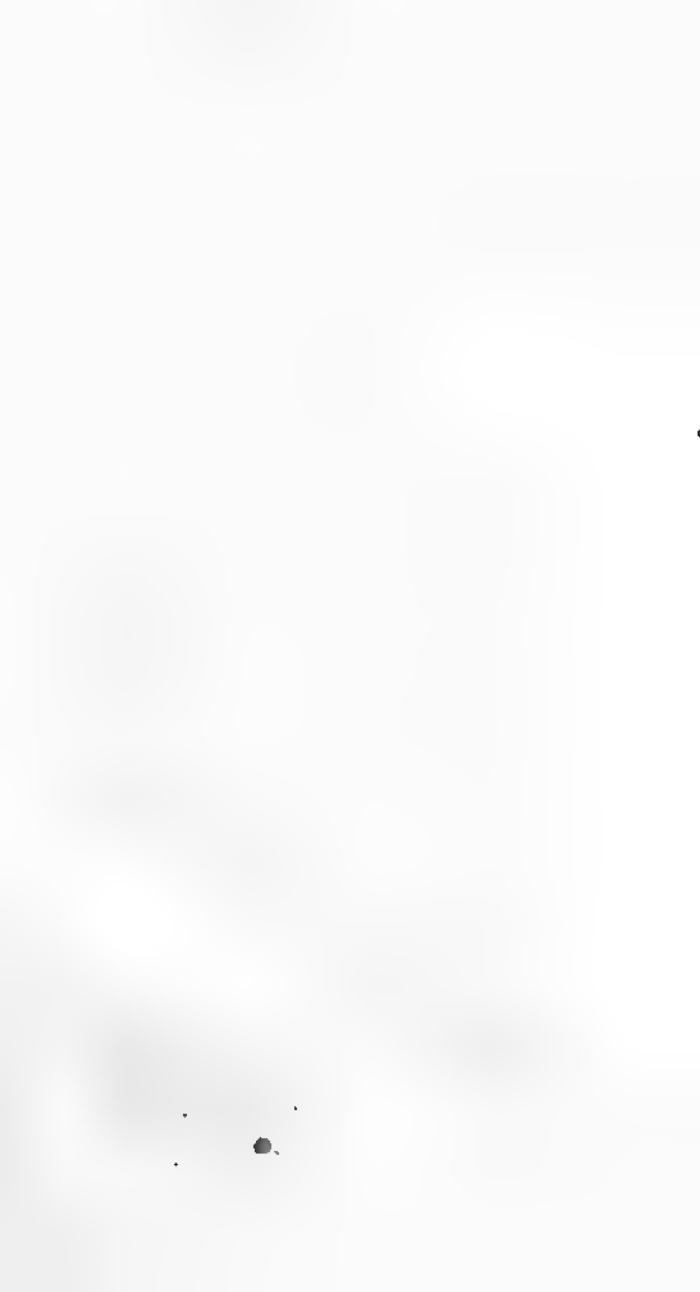
стр.	строк.	напечатано	читай
	12	АСВ	АСЕ
207	5	раздѣлитъ	раздѣлитъ
208	5	углу ЕСА	углу FCA
210	6	или ВО	или ВН
216	5	2EAD	2 EDA
218	10	точка D	точка В
220	4. 16	двумъ прямымъ	четыремъ пря- мымъ
227	21	AL	AE
	24	EF	FI
248	10	AD: AB	AC: AB
256	4	равныя основа- нія имѣющіе	разныя основа- нія и высоты имѣющіе
259	23	по высота	по высота тре- угольниковъ
264	9	діаметръ	діаметръ круга
260	8	$\frac{ab. DE}{AB}$	$\frac{ab. DF}{AB}$
270	24	что	чтобъ
274	17	2СМ²	СМ²
277	24	и ко всякой	и ко всякой ли- неѣ
284	15	фигуры	призмы
289	10	треугольника	треугольникъ
296	25	есмь	есть
311	8	$\frac{\pi}{8} \times EB \times CL^2$	$\frac{\pi}{8} \times EB \times EL^2$
312	6	$\frac{\pi}{16} (2AB^2 + EG^2) \times EB$	$\frac{\pi}{16} (2AB^2 + EG^2) \times EB$

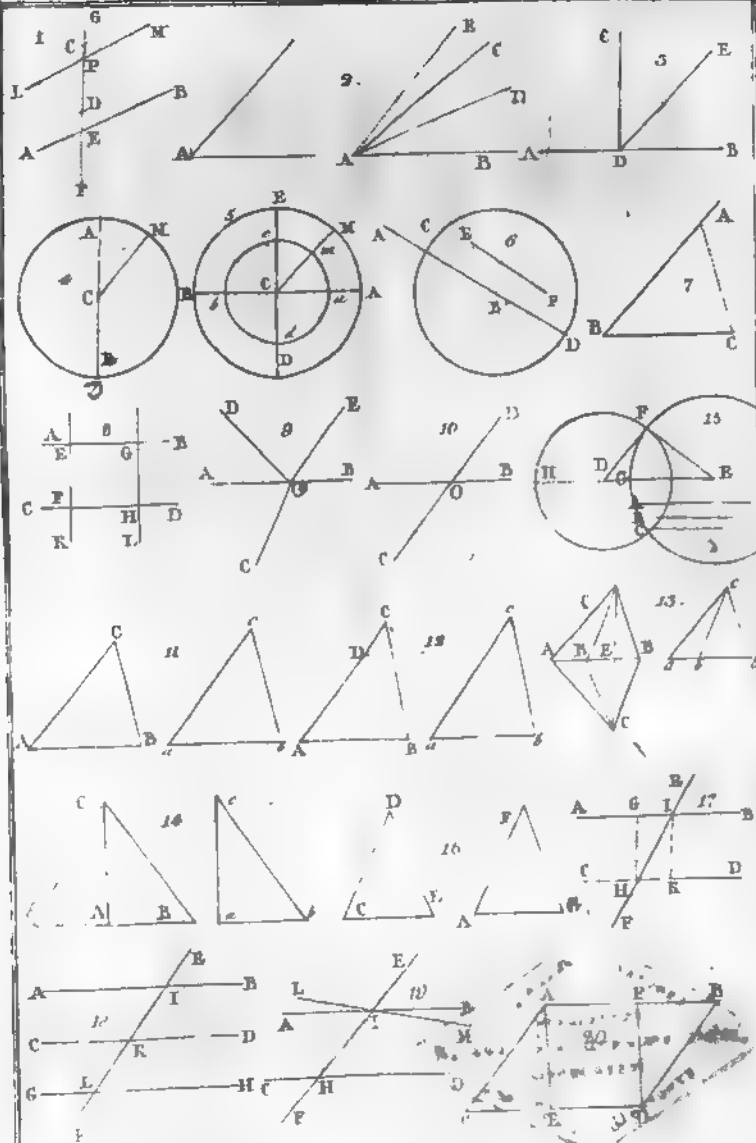
погрѣшности.

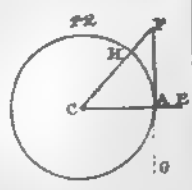
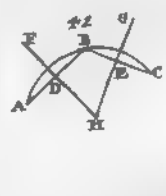
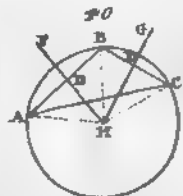
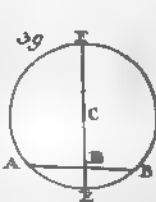
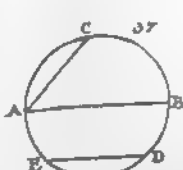
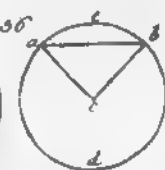
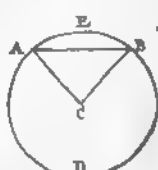
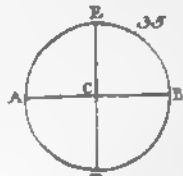
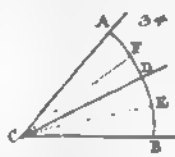
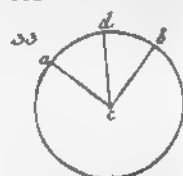
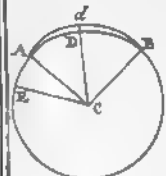
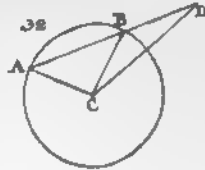
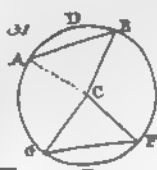
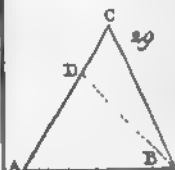
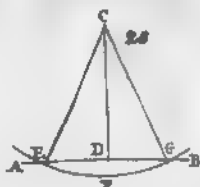
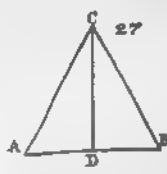
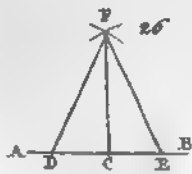
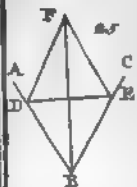
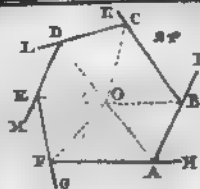
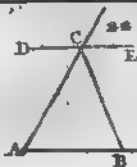
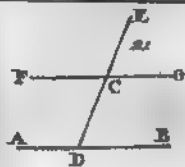
стр.	строк.	напечатано	читай
319	14	называется	назовется
	21	различать	различить
320	20	означается	означится
337	26	точное	точнѣе
382	9	Ноней	И ній
	26	диоптрѣ	диоптрѣ
393	10	вымѣрять	вымѣряны
404	6	на большое	на большее
412	16	мѣрѣ посылакою	мѣрѣ найдется посылакою
413	посл.	ереу	берегу
414	21	точко	точка
	23	точку В	линею АВ
418	5	въ ономѣ	въ оныхѣ
425	22	ВВГ	В \ Е
433	27	напередѣ	напередѣ

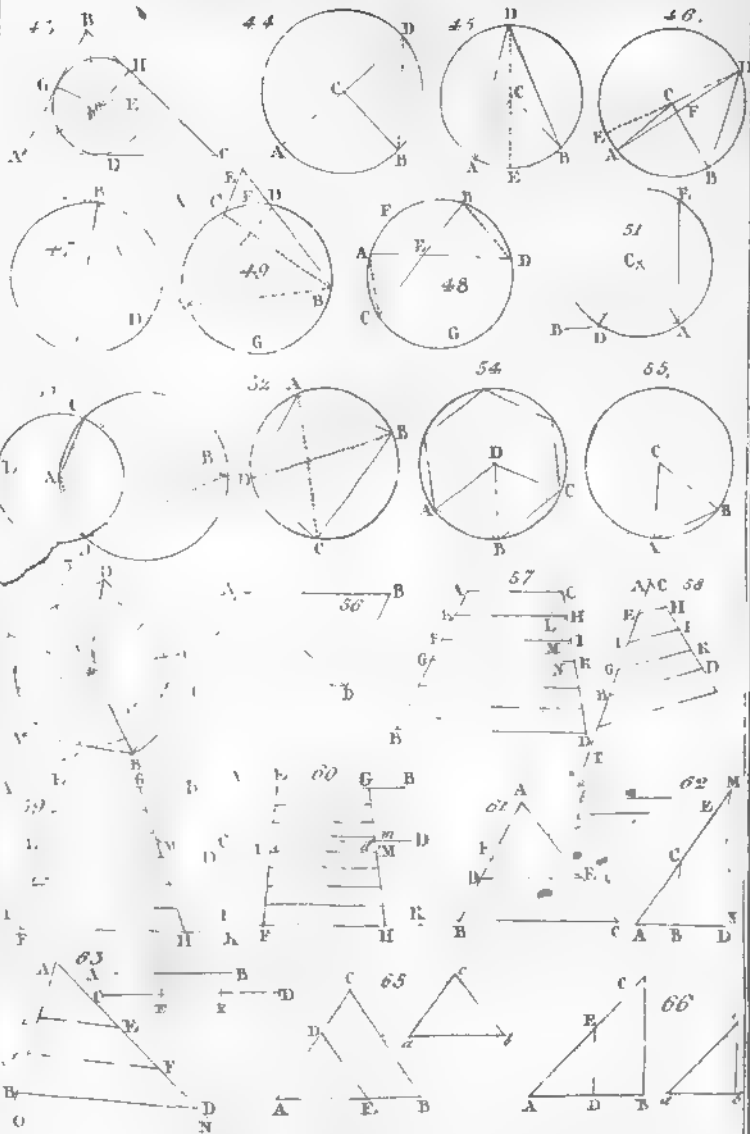
Протчія погрѣшности, гдѣ вмѣсто
рашныя данныя количества или ли-
 ней, напечатано *рашныя данные* и
 сичѣ подобныя, благосклонный Чи-
 татель самъ исправить можетъ.

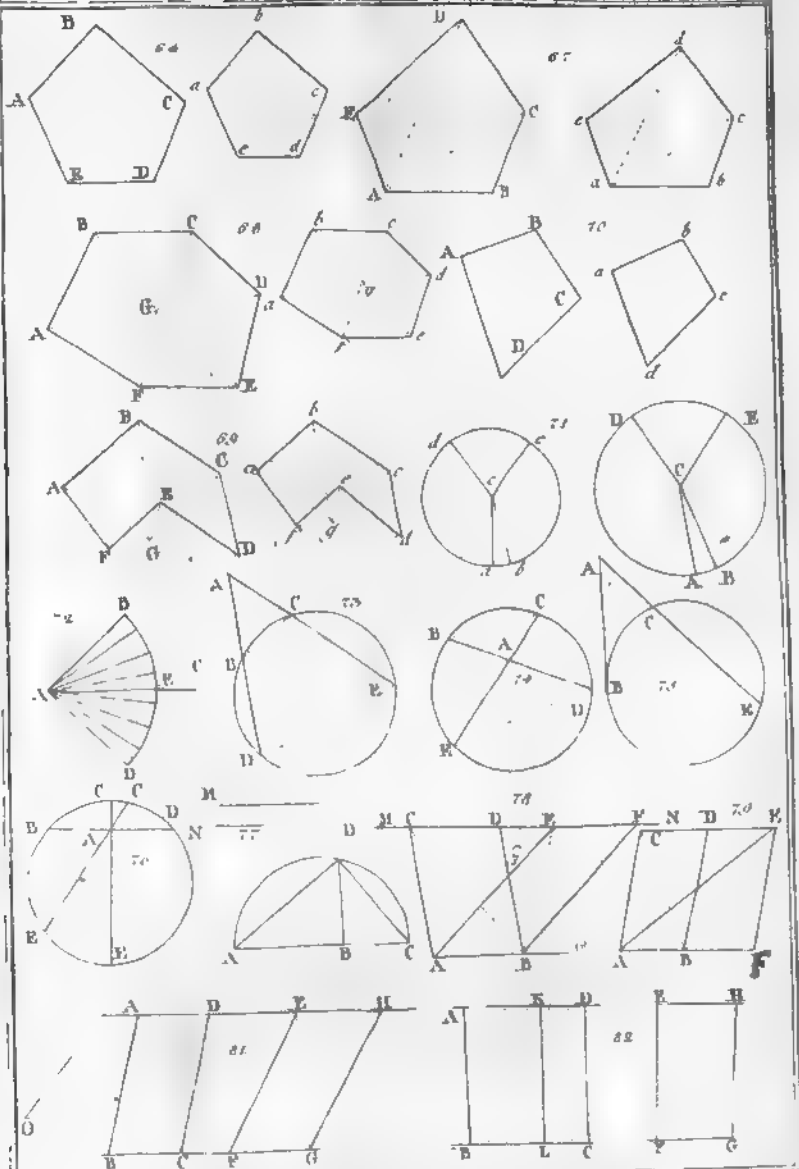


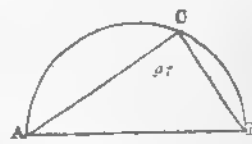
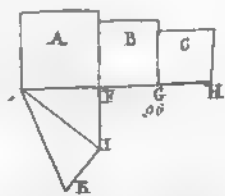
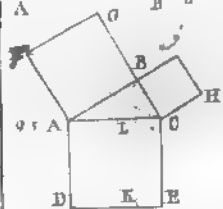
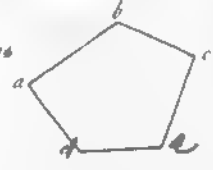
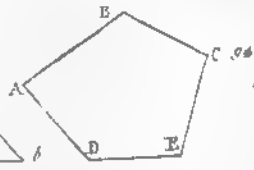
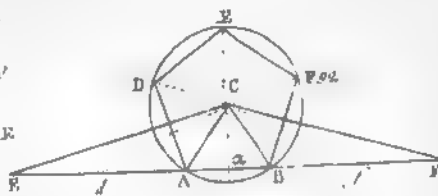
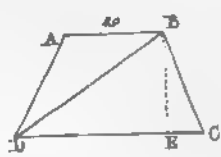
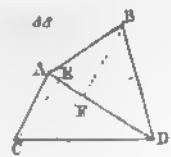
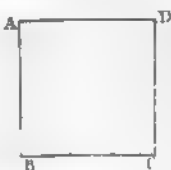
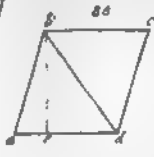
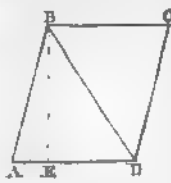
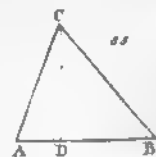
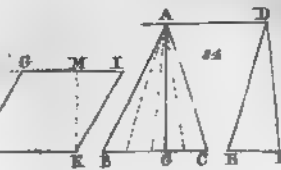
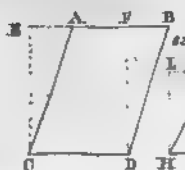
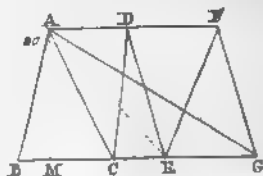


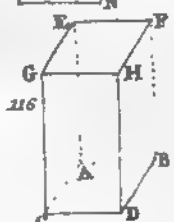
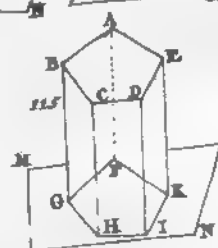
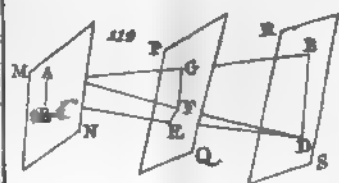
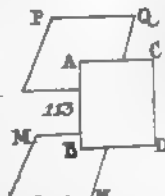
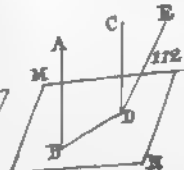
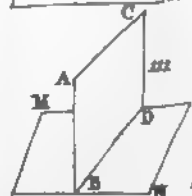
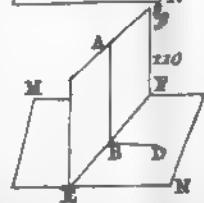
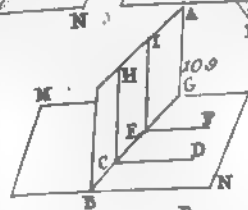
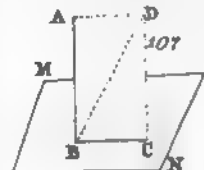
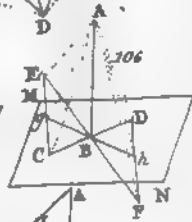
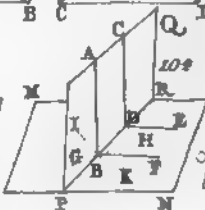
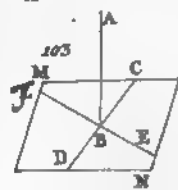
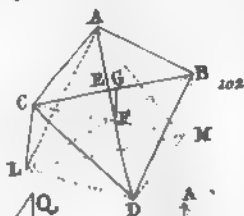
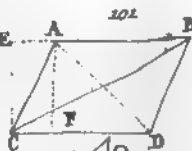
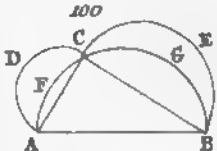
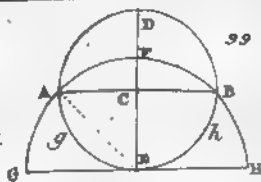
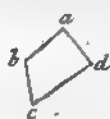
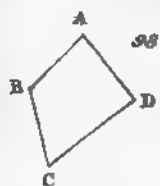


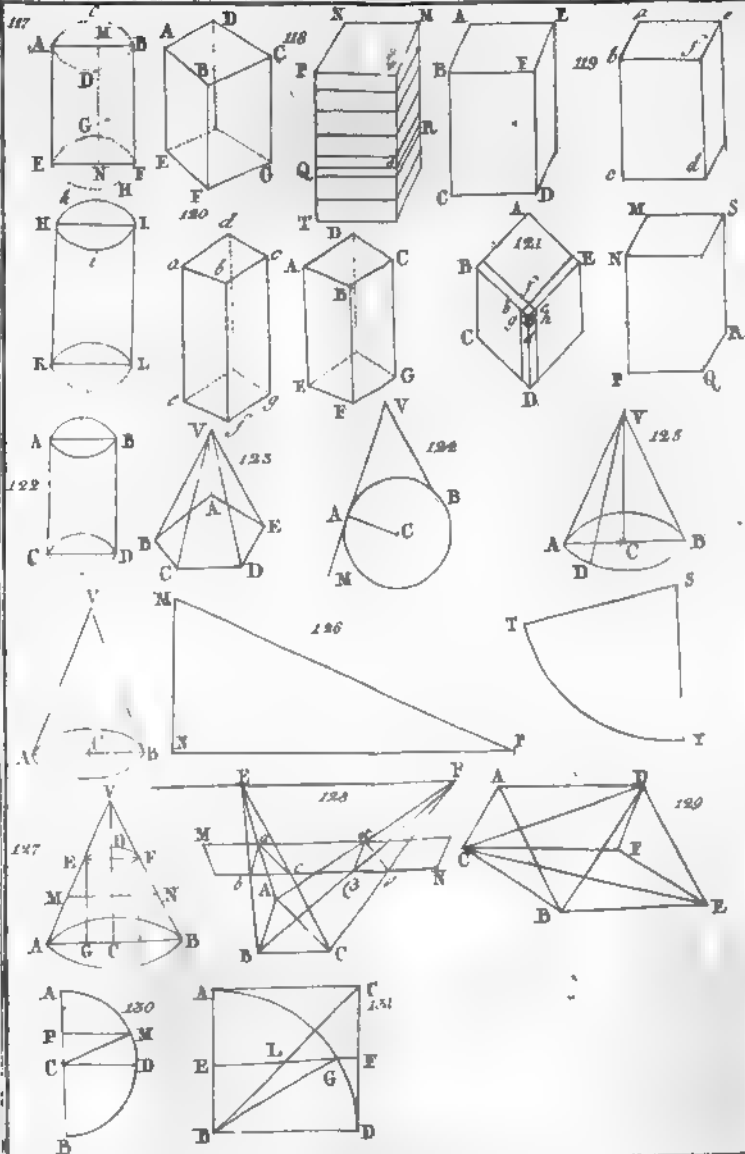


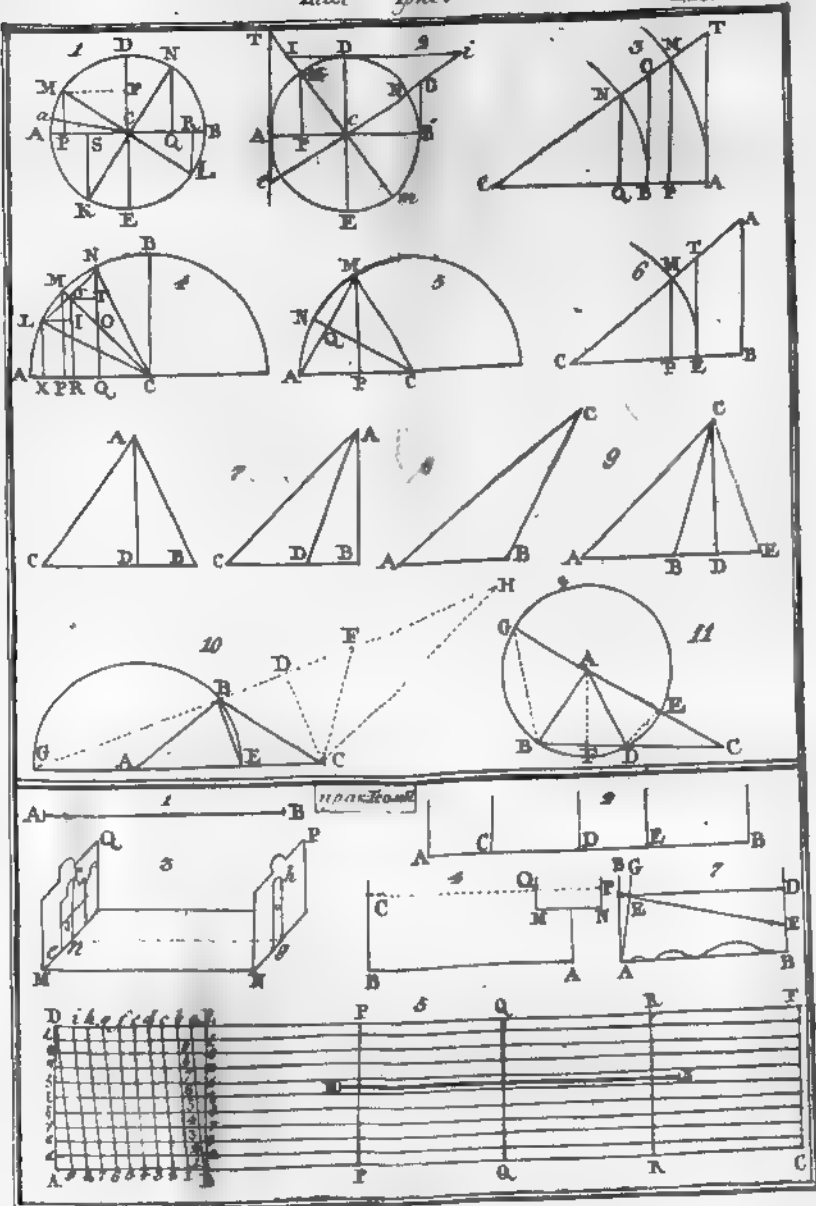


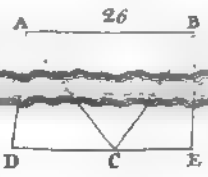
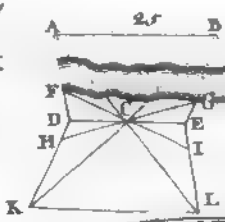
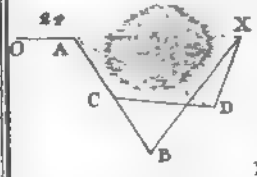
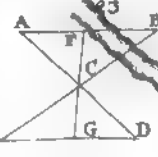
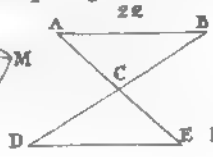
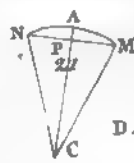
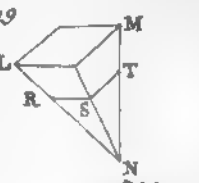
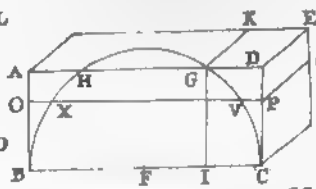
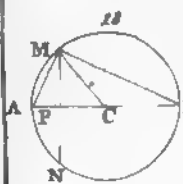
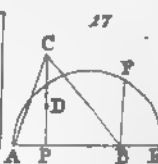
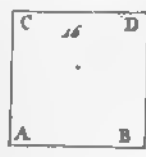
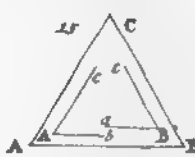
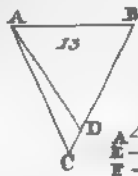
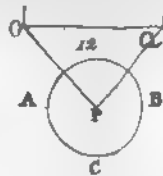
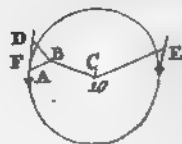
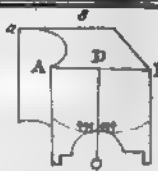


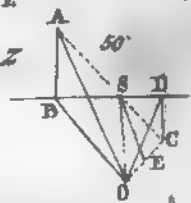
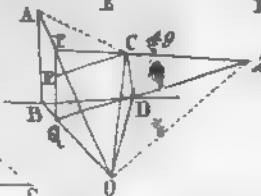
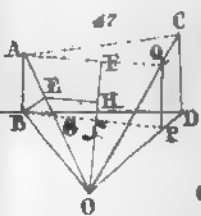
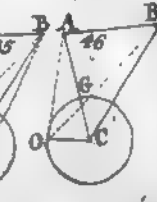
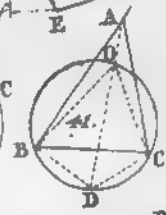
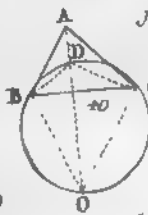
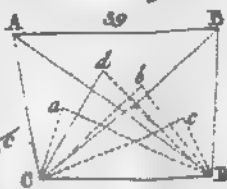
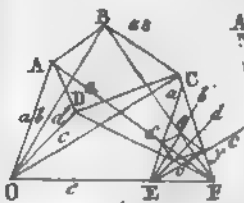
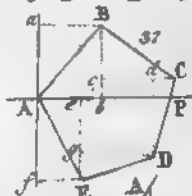
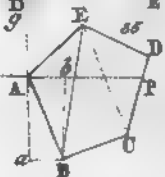
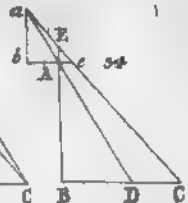
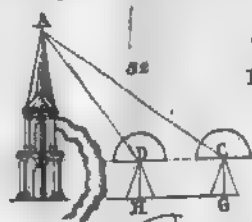
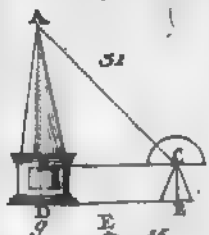
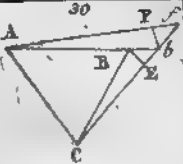
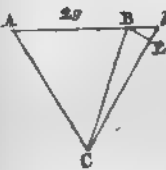
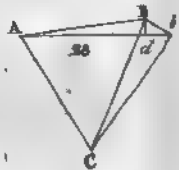
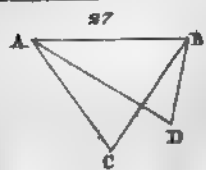












$$\frac{2AB^2 + ES^2}{AB - AE} = \frac{2AB^2 + ABES^2 - 2AB^2AE - AEES^2}{2AB^2 + ABES^2 - 2AB^2AE - AEES^2}$$

